Examen - Métodos Numéricos

Lunes 30 de Enero de 2017

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (30 puntos)

a) Sea A una matriz no singular y α la única solución del sistema lineal $Ax = b$. Consideremos un método iterativo de la forma $x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + r$, siendo Q y r matriz y vector fijos tales que $\alpha = Q\alpha + r$.
Demostrar que $\{x^{(n)}\}$ converge a α independiente de $x^{(0)} \Leftrightarrow \rho(Q) < 1$.

b) Definir matriz diagonal dominante en sentido estricto por filas.

c) Demostrar que la condición anterior es suficiente para asegurar convergencia del método de Jacobi.

d) Estudiar convergencia de Jacobi partiendo del vector nulo para el sistema $Ax = b$, con $b = (0, 0, 1)^t$ y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (35 puntos)

a) Definir Problema de Valores Iniciales (PVI).

b) Deducir los métodos de Euler hacia adelante y Trapecio.

c) Resolver de forma exacta el PVI $y'(t) = 3y(t) - t$ con dato inicial $y(0) = 0$.

d) Analizar el error cometido por los dos métodos anteriores para estimar $y(1)$ usando paso $h = 1/2$.

Problema 3 (35 puntos)

a) Enunciar y demostrar el Teorema del Error por Interpolación Polinómica.

b) Se considera $f : f(x) = e^x$ definida en el intervalo $[0, 1]$. Expresar, para cada entero positivo n, el polinomio interpolante $p_n(x)$ de f por las $n + 1$ abscisas equiespaciadas $\{\frac{i}{n}, i = 0, \ldots, n\}$.

c) Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de errores: $E_n = \text{máx}_{x\in[0,1]} |p_n(x) - f(x)|$.
Estudiar acotación de $\{E_n\}_{n\geq 1}$.

d) Decidir si la familia de polinomios $\{p_n(x)\}$ converge uniformemente a f en $[0, 1]$.
Sugerencia: Estudiar el límite de la sucesión $\{E_n\}_{n\geq 1}$.