Solución Examen - Métodos Numéricos

Martes 20 de diciembre de 2016

Problema 1 (35 puntos)

a) Vamos a obtener el Problema de mínimos Cuadrados Lineal (PMCL) partiendo de una ley teórica $y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i(x)$ y m datos experimentales $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$, con $m \geq n$.

Lo que se desea es elegir los coeficientes a_i de modo que el valor experimental y_i sea próximo al teórico $y(x_i)$ para todo dato $i \in \{1, \dots, m\}$. Una noción de proximidad que lleva al PMCL es la norma 2. Sean $a = (a_1, \dots, a_n)$ el vector con n incógnitas, $y = (y(x_1, \dots, y(x_m)))$ el vector con evaluaciones de la ley teórica e $y' = (y_1, \dots, y_m)$ el vector experimental. Entonces, se debe hallar a tal que:

$$\begin{aligned}\min_{a\in\mathbb{R}^n} \|y - y'\|_2^2 &= \min_{a\in\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} (y(x_j) - y_j)^2 \\ &= \min_{a\in\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} ([\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_j)a_i] - y_j)^2.\end{aligned}$$

El PMCL también se puede reescribir en términos matriciales. Se debe hallar el vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\phi a - y'\|_2^2$ sea mínima, siendo ϕ una matriz tal que $\phi_{ij} = \phi_j(x_i)$.

b)

Teorema 1. *El conjunto de soluciones del Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL),* $\min_x \|Ax - b\|_2^2$ *coincide con el de las ecuaciones normales:* $A^tAx = A^tb$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ solución de las ecuaciones normales, y tomemos $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Como x es solución de las ecuaciones normales, tenemos que $A^t(Ax - b) = 0$. Luego:

$$\begin{aligned}\|b - Ay\|_2^2 &= \|b - Ax + A(x - y)\|_2^2 \\ &= \|b - Ax\|_2^2 + \|A(x - y)\|_2^2 + (A(x - y))^t(b - Ax) + (b - Ax)^t(A(x - y)) \\ &= \|b - Ax\|_2^2 + \|A(x - y)\|_2^2,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $(A(x - y))^t(b - Ax) = (x - y)^t[A^t(b - Ax)] = 0$ y que $(b-Ax)^t(A(x-y)) = (x-y)^t[A^t(b-Ax)] = 0$. Luego, $\|b-Ay\|_2^2 \geq \|b-Ax\|_2^2$ para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$, mostrando así que x alcanza la norma mínima en el PMCL, y es por tanto solución del PMCL.
Veamos por último que si x no es solución de las ecuaciones normales, entonces tampoco minimiza la expresión $\|Ay-b\|_2^2$. Sea $A^t(Ax-b) = z$ un vector no nulo, y elijamos y tal que $x - y = -hz$ para h pequeño positivo. Entonces:

$$\begin{aligned}\|b - Ay\|_2^2 &= \|b - Ax\|_2^2 + h^2\|Az\|_2^2 - 2h(Az)^t(b - Ax) \\ &= \|b - Ax\|_2^2 + h^2\|Az\|_2^2 - 2h\|z\|_2^2 < \|b - Ax\|_2^2,\end{aligned}$$

si se elige h suficientemente pequeño, donde se ha utilizado que $(Az)^t(b - Ax) = z^t[A^t(b - Ax)] = z^tz = \|z\|_2^2$. Luego, x no minimiza $\|b - Ay\|_2^2$, y por tanto no es solución del PMCL. Esto concluye el hecho que la soluciones de las ecuaciones normales y el PMCL coinciden, como se quería demostrar. $\square$

c) Para lograr una aproximacin del valor propio λ_p usando una aproximacin $\hat{v}_p$ de su vector propio asociado, buscamos minimizar la siguiente expresión:

$$\min_{\lambda} \|A\hat{v}_p - \lambda\hat{v}_p\|_2^2$$

Esto es equivalente a un PMCL:

$$\min_{x} \|Mx - b\|_2^2$$

Con: $x = \lambda$, $M = \hat{v}_p$ y $b = A\hat{v}_p$.
Las ecuaciones normales $M^T Mx = M^T b$ resultan en:

$$\hat{v}_p^T \hat{v}_p \lambda = \hat{v}_p^T A\hat{v}_p$$

Resolviendo en λ obtenemos:

$$\hat{\lambda}_p = \frac{\hat{v}_p^T A\hat{v}_p}{\hat{v}_p^T \hat{v}_p}$$

d) El numerador del cociente de Rayleigh es igual a: 4,5753, mientras que el denominador es igual a 1,001. La aproximación de Rayleigh para el valor propio es:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{4{,}5753}{1{,}001} = 4{,}57484$$

El polinomio característico de A es: $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 14 * \lambda + 12$. Los valores propios son $\lambda_1 = 1 + \sqrt{13}$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_1 = 1 - \sqrt{13}$.

El vector propio (con norma 1) asociado a $\lambda_1 \approx 4{,}605551$ es:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0{,}751304 \\ 0{,}652521 \\ -0{,}0987837 \end{pmatrix}$$

El error relativo en el vector propio es $\|v_1 - \hat{v}_1\|/\|v_1\| = 0{,}0658$ y el error relativo en la aproximación del valor propio es: $\|\lambda_1 - \hat{\lambda}_1\|/\|\lambda_1\| = 0{,}006668$.

Problema 2 (35 puntos)

a) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de variable real. Un Método Iterativo General o MIG es una sucesión de la forma $x_{n+1} = g(x_n)$, partiendo de cierto $x_0 \in \mathbb{R}$. La definición de MIG también se puede generalizar a conjuntos arbitrarios X en lugar de $\mathbb{R}$, como por ejemplo cualquier espacio métrico completo. Se observa que si la sucesión estabiliza en α, necesarimente $\alpha = g(\alpha)$, es decir, se halla un punto fijo de g. Frecuentemente se lleva un problema de hallar una raíz a otro de punto fijo. Valen en los MIGs los dos teoremas que se enuncian a continuación.

b)

Teorema 2 (Punto Fijo)**.** *Si X es un espacio métrico completo y $\varphi : X \to X$ una r-contracción con $r < 1$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge al punto fijo de φ, que además es único. El resultado no depende del elemento inicial $x_0 \in X$.*

c)

Teorema 3 (Orden de un MIG)**.** *Sea α punto fijo de $g \in \mathbb{C}^p$, y x_0 elegido de modo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por el MIG $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a α. Si las derivadas i-ésimas de g verifican $g^{(i)}(\alpha) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, p-1$ pero $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene orden de convergencia p.*

Demostración. El error del paso $n+1$ es $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$, por ser α punto fijo de g. Para cada natural n, apliquemos un desarrollo de Taylor de $g(x_n)$ centrado en α. Como las derivadas de g son todas nulas hasta $p-1$ inclusive, tenemos que:

$$|e_{n+1}| = |g(x_n) - g(\alpha)| = |\frac{g^{(p)}(\gamma_n)}{p!}||x_n - \alpha|^p = \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!}|e_n|^p,$$

para cierto γ_n comprendido entre x_n y α. Como sabemos que x_n converge a α, entonces $d(\gamma_n, \alpha) \leq d(x_n, \alpha) \to 0$, y en particular la sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a α. Como la función $|g^{(p)}|$ es continua, entonces $|g^{(p)}|(\gamma_n) \to |g^{(p)}|(\alpha)$. Reescribiendo, tenemos que para todo n existe γ_n comprendido entre α y x_n tal que:

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!} \tag{1}$$

Finalmente, tomando límite con n tendiendo a infinito, tenemos que:

$$\lim_n \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lim_n \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!} = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} = \beta, \tag{2}$$

Por hipótesis $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Por definición tenemos que el orden de convergencia del MIG es p, y su tasa es $\beta > 0$. □

d) Como f es continua y $f(-1)f(0) < 0$, sabemos que f admite una raíz $\alpha \in [-1, 0]$. Además, f es monótona creciente en sentido estricto, por lo que la raíz es única en tal intervalo. Ambos MIGs propuestos verifican $g_1(\alpha) = \alpha$ y $g_2(\alpha) = \alpha$. El MIG asociado a g_2 es el método de Newton Raphson, que en estas condiciones converge con orden cuadrático. Sin embargo, el MIG asociado a g_1 no converge, pues la magnitud de la derivada $|g_1'(x)| = 3x^2 + 2 \geq 2$ es mayor que la unidad.

Problema 3 (30 puntos)

a) Utilizando el método de Lagrange, el polinomio interpolante a f por $\{-1, 0, 1\}$ es:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{f(-1)}{2}x(x-1) - f(0)(x+1)(x-1) + \frac{f(1)}{2}x(x+1) \\ &= \frac{x^2}{2}(f(-1) - 2f(0) + f(1)) + \frac{x}{2}(f(1) - f(-1)) + f(0). \end{aligned}$$

Al integrar p_2 obtenemos la regla de Simpson:

$$I_S = \int_{-1}^{1} p_2(x)dx = \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)).$$

b) $I_n = \int_{-1}^{1} x^n dx$, por lo que $I_{2m} = \frac{2}{2m+1}$, $I_{2m+1} = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}^+$. Se observa que x^{2n+1} es una función impar, y la regla de Simpson en funciones impares vale 0. Luego, integra sin error a todos los monomios con exponente impar. No obstante, si $f(x) = x^{2n}$ es par, queda $I_S = \frac{2}{3}f(1) = \frac{2}{3}$, independiente de n. En conclusión, el error es 0 cuando n es impar, y si $n = 2m$ resulta un error $E_n = E_{2m} = |\frac{2}{2m+1} - \frac{2}{3}|$.

c) El primer entero positivo n que tiene error no nulo es $n = 4$. Luego, la regla de Simpson integra exactamente todo polinomio de grado 3 o menos, y su grado de exactitud es 3.

d) La regla de Gauss con $n + 1$ puntos tiene grado de exactitud $2n + 1$. Eligiendo $n = 2$ se ve que la regla de Gauss de 3 puntos tiene grado de exactitud 5. Por lo tanto, la regla de Gauss de 3 puntos y la regla de Simpson no coinciden.