Examen - Métodos Numéricos

Martes 20 de diciembre de 2016

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

Sea A una matriz cuadrada simétrica y v_p un vector propio asociado al valor propio λ_p. El cociente de Rayleigh provee la siguiente apoximación de λ_p, conocida una estimación $\hat{v}_p$ del vector propio v_p:

$$\hat{\lambda}_p = \frac{\hat{v}_p^t A \hat{v}_p}{\hat{v}_p^t \hat{v}_p}$$

a) Enunciar el problema de mínimos cuadrados lineal (PMCL).
b) Demostrar que el conjunto solución del PMCL y de las ecuaciones normales coincide.
c) Deducir el cociente de Rayleigh resolviendo el PMCL $\min_\lambda \|A\hat{v}_p - \lambda \hat{v}_p\|_2^2$.
d) Calcular el error cometido mediante la aproximación de Rayleigh usando el vector $\hat{v}_p = (0.76, 0.63, -0.16)^t$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: notar que -1 es valor propio de A.

Problema 2 (35 puntos)

a) Definir Método Iterativo General (MIG).
b) Enunciar el Teorema del Punto Fijo en espacios métricos completos.
c) Enunciar y demostrar el teorema de órdenes para un MIG.
d) Para aproximar la única raíz de $f : f(x) = x^3 + x + 1$ se consideran los MIGs asociados a las siguientes funciones:
(1) $g_1(x) = x^3 + 2x + 1$
(2) $g_2(x) = x - \frac{(x^3+x+1)}{(3x^2+1)}$
partiendo de $x_0 = 0$. Seleccionar el mejor MIG, y justificar la respuesta.

Problema 3 (30 puntos)

Se desea calcular el número $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ de una función integrable en $[-1, 1]$. La regla de Simpson propone hallar el polinomio interpolante de f por las abscisas $\{-1, 0, 1\}$ y estimar I mediante la integral en del polinomio obtenido en $[-1, 1]$.

a) Deducir la regla de Simpson a partir de su definición. Expresarla mediante una combinación lineal de los números $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$.
b) Para cada entero positivo n, calcular el error cometido por la regla de Simpson al estimar $I_n = \int_{-1}^{1} x^n dx$.
c) Calcular el grado de exactitud de la regla de Simpson.
d) Decidir si es un caso particular de regla de Gauss. Justificar.

Fundamentar detalladamente cada respuesta.