Solución Examen - Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UdelaR

28 de julio de 2016

Problema 1 (35 puntos)

a) El teorema del punto fijo trabaja con las siguientes funciones (no era necesario aclararlo).

Definición [contracción]: *Una función $g : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una contracción si* $\exists\, \alpha \in [0,1) /\ \forall a, b \in X : \|g(a) - g(b)\| \leqslant \alpha \,\|a - b\|$.

A partir de aquí es lo que pide la letra del ejercicio.

Teorema: *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$, con C compacto. Si $g : C \to C$ es una contracción, entonces existe un único $v^* \in C / g(v^*) = v^*$, o sea que g tiene un único punto fijo en C.*

Además, cualquier sucesión de la forma $\begin{cases} v_0 \in C, \ \text{un vector cualquiera de } C \\ v_n = g(v_{n-1}), \ \text{para } n \geqslant 1 \end{cases}$

converge a v^*.

b) El conjunto solución son los $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in [-1,1]^2 / \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y}{8} - x = 0 \\ \frac{x}{8} - \frac{y^2}{8} - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} = x \\ \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = y \end{cases}$

Si se define $g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2 / \, g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{8} + \frac{y}{8} \\ \frac{x}{8} - \frac{y^2}{8} \end{bmatrix}$, es claro que $g([-1,1]^2) = [-1,1]^2$, así que se tiene $g : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ y el problema se reduce a encontrar $v^* \in [-1,1]^2 / g(v^*) = v^*$.

c) $[-1,1]^2$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$, solo basta probar que g es una contracción para poder aplicar el teorema del punto fijo.

Sea $\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \} \subset [0,1]^2$ y $\| \, \|_1$:

$$
\begin{aligned}
\|g(x,y)-g(w,z)\|_1 &= \frac{1}{8}\|(x^2+y-w^2-z, x-y^2-w+z^2)^{\mathtt{T}}\|_1 \\
&= \frac{1}{8}(|x^2+y-w^2-z|+|x-y^2-w+z^2|) \\
&= \frac{1}{8}(|\underbrace{x^2-w^2}_{=(x+w)(x-w)}+y-z|+|x-w-(\underbrace{y^2-z^2}_{=(y+z)(y-z)})|) \\
&\leqslant \frac{1}{8}(|(x+w)||(x-w)|+|y-z|+|x-w|+|(y+z)||(y-z)|) \quad \text{(Desig. triangular de} |\ |) \\
&= \frac{1}{8}(\underbrace{(|x+w|+1)}_{\leqslant |x|+|w|+1\leqslant 1+1+1=3}|x-w|+\underbrace{(|y+z|+1)}_{\leqslant |y|+|z|+1\leqslant 1+1+1=3}|y-z|) \\
&\leqslant \frac{1}{8}(3|x-w|+3|y-z|) \\
&= \frac{3}{8}\|(x,y)^{\mathtt{T}}-(w,z)^{\mathtt{T}}\|_1
\end{aligned}
$$

Esto prueba que $g:[-1,1]^2\to[-1,1]^2$ es una contracción.

Con las dos observaciones anteriores se cumplen las hipótesis del teorema del punto fijo para el caso de $\mathbb{R}^2$, con lo cuál se puede afirmar que en $[-1,1]^2$ hay un único vector $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ que cumple $g(x^*,y^*)=\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$. Por la parte b), se sabe que resolver el sistema equivale a resolver los puntos fijos de $g:[-1,1]^2\to[-1,1]^2$, por ende, el sistema tiene solución y es única.

d) La función a buscarle las raíces queda determinada por el sistema tal cual está expresado, o sea que $f(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{x^2}{8}+\frac{y}{8}-x \\ \frac{x}{8}-\frac{y^2}{8}-y \end{bmatrix}$

Newton-Raphson (sin condiciones de parada) para este caso queda:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in [-1,1]^2 \\
\left.\begin{array}{l}
\text{Resolver } \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \frac{x_{n-1}}{4}-1 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{y_{n-1}}{4}-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = -f(x_{n-1},y_{n-1}) \\
\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}
\end{array}\right\} n\geqslant 1
\end{array}
\right.
$$

Paso $n=1$:

- $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = -f(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{55}{47} \\ -\frac{1}{47} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{55}{47} \\ -\frac{1}{47} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{47} \\ -\frac{1}{47} \end{bmatrix}$

Problema 2 (30 puntos)

a) Sea f de clase C^{n+1} en el intervalo $[x_0,x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0<x_1<\ldots<x_n$. Luego, para cada $x\in[x_0,x_n]$ existe $\gamma_x\in[x_0,x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:

$$
E(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{1}
$$

Demostración:

Tomemos $x\in[x_0,x_n]$ fijo. Si $x=x_i$ para algún i, la igualdad es evidente, pues

$E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x))\frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n + 2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase C^{n+1}, resulta que F también es de clase C^{n+1}. Sean $p_0 < p_1 \ldots < p_{n+1}$ las $n + 2$ raíces de F. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n+1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para F'. Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n + 1$ es nula. Entonces, al derivar $n + 1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma_x) - (n + 1)!\frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado.

b) El método de Lagrange considera la base de polinomios $\{l_i(x)\}_{i=0,\ldots,n}$ tal que $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$, que vale 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Una expresión para los miembros de tal base se consigue por descomposición factorial:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}$$

Luego, el polinomio interpolante, que sabemos que es único, admite la siguiente expresión:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x) \tag{2}$$

Para hallar el polinomio interpolante de Lagrange de $f(x) = sen(\pi x)$ por las abscisas $x_i = \frac{i}{n}$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, simplemente sustituimos en la Expresión (2), y usamos que $sen(0) = sen(\pi) = 0$:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} sen\left(\frac{i\pi}{n}\right)\frac{\prod_{j\neq i}(x - \frac{j}{n})}{\prod_{j\neq i}(\frac{i}{n} - \frac{j}{n})} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} sen\left(\frac{i\pi}{n}\right)\frac{\prod_{j\neq i}(nx - j)}{\prod_{j\neq i}(i - j)} \end{aligned}$$

c) Observemos que si $|f^{(n+1)}(x)| \leq \pi^{n+1}$, mientras que si $x_i, x \in [0, 1]$ tenemos que $|x - x_i| \leq 1$. Reemplazando en la Expresión (1) tenemos que $E_n \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$. Entonces, el error decae uniformemente a cero cuando la cantidad de puntos de interpolación tiende al infinito.

d) El fenómeno de Runge ocurre al tomar funciones donde la derivada enésima supera el orden factorial. En tal caso, el error de interpolación puede crecer indefinidamente fuera de los puntos de interpolación, a medida que el número de puntos aumenta y es elegido de manera equiespaciada. Un ejemplo donde ocurre este fenómeno es en la llamada *función de Runge*: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$.

Por el Teorema de Stone-Weierstrass, la familia de funciones polinómicas permite aproximación uniforme de cualquier función continua dentro de un dominio compacto. No obstante, la correcta selección de polinomios interpolantes depende de la elección de las abscisas de interpolación. Este problema de selección de puntos interpolantes es tema actual de investigación.

Problema 3 (35 puntos)

a) Supongamos que $A = L + D + U$, siendo L, D y U matriz inferior, diagonal y superior de A respectivamente. Entonces el método de Jacobi es de la forma $x_{k+1} = Q_J x_k + r_J$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $Q_J = -D^{-1}(L + U)$ y $r_J = D^{-1}b$.

b) Si A es diagonal dominante entonces Jacobi es convergente para todo punto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. En general, la iteración de la forma $x_{k+1} = Qx_k + r$ es convergente a su punto fijo si y solo si $\rho(Q_J) < 1$, siendo $\rho(\cdot)$ el radio espectral.

c) En este caso la matriz A no es diagonal dominante, por lo que no se puede utilizar el primer criterio de suficiencia. La matriz de iteración es

$$Q_J = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios son $\lambda = \pm 2i$. Por lo tanto $\rho(Q_J) = 2 > 1$ y se concluye que el método no es convergente.

d) Ahora el método utiliza $Q = wQ_J + (1-w)Id$, con $w > 0$ parámetro de relajación. Es decir:

$$Q = \begin{pmatrix} 1-w & 6w \\ -\frac{2}{3}w & 1-w \end{pmatrix}$$

Sus valores propios son $\lambda = (1-w) \pm 2iw$. Busquemos $w > 0$ para que ambos valores propios tengan magnitud inferior a 1. Tenemos que $|\lambda|^2 = (1-w)^2 + 4w^2 = 5w^2 - 2w + 1 < 1$, o equivalentemente, $5w^2 - 2w < 0$. Usando que $w > 0$ y factorizando, tenemos que si $w \in (0, 2/5)$ se asegura convergencia. Conseguimos así relajar el método de Jacobi en un caso que no era convergente y traducirlo a otro método que sí es convergente.