

Examen - Métodos Numéricos

Jueves 28 de julio de 2016

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

- Enunciar el teorema del punto fijo para funciones en \mathbb{R}^2 .
- Expresar el siguiente sistema no lineal como un problema de punto fijo:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{8} + \frac{y}{8} - x &= 0 \\ \frac{x}{8} - \frac{y^2}{8} - y &= 0\end{aligned}$$

- Probar que el sistema anterior admite una única solución en $[-1, 1]^2$.
Sugerencia: utilizar las partes anteriores y considerar la norma 1 en \mathbb{R}^2 .
- Aplicar un paso del método de Newton-Raphson al sistema anterior partiendo de $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Problema 2 (30 puntos)

- Enunciar y demostrar el teorema de acotación del error en interpolación polinómica.
- Expresar el polinomio interpolante $p_n(x)$ por las $n + 1$ abscisas $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$ de la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en $[0, 1]$, utilizando la base de Lagrange.
- Mostrar que a medida que n crece, el error de interpolación decae uniformemente a cero en todo el intervalo $[0, 1]$.
- Explicar el fenómeno de Runge y dar un ejemplo de una función en la cual se aprecia este fenómeno.

Problema 3 (35 puntos)

Sea A una matriz no singular de tamaño n , y b un vector de \mathbb{R}^n . Se desea estimar la solución del sistema lineal $Ax = b$ utilizando el método de Jacobi.

- Expresar el método iterativo de Jacobi como $x_{k+1} = Q_J x_k + r_J$, donde Q_J y r_J se deben expresar en términos de la matriz A y el vector b .
- Enunciar una condición para Q que asegure convergencia del método de Jacobi, independientemente del punto inicial x_0 .
- Demostrar que el método de Jacobi no converge para el vector $b = (1, 0)^t$, con $x_0 = (0, 0)^t$ y la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Considere la relajación del método de Jacobi donde $Q = wQ_J + (1 - w)Id$ es la nueva matriz de iteración. Decidir si existe $w > 0$ que garantice convergencia de este método para el sistema lineal anterior.

Fundamentar detalladamente cada respuesta.