Solución Examen - Métodos Numéricos

Miercoles 24 de febrero de 2016

Problema 1 (30 puntos)

a) Ver Teórico.

b) Demostremos por inducción.

Paso Base: $n = 1$ tenemos por definición $\bar{f}_1(x,h) = f(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} C_i^{(1)} h^{p_i}$.

Paso Inductivo:

H.I.) Tenemos que: $\bar{f}_k(x,h) = f(x) + \sum_{i=k}^{+\infty} C_i^{(k)} h^{p_i}$.

T.I) Queremos probar que: $\bar{f}_{k+1}(x,h) = f(x) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} C_i^{(k+1)} h^{p_i}$.

$$\bar{f}_{k+1}(x,h) = \bar{f}_k(x,h/q) + \frac{\bar{f}_k(x,h/q) - \bar{f}_k(x,h)}{q^{p_k} - 1} =$$

$$= f(x) + \sum_{i=k}^{+\infty} C_i^{(k)} \left(\frac{h}{q}\right)^{p_i} + \frac{\sum_{i=k}^{+\infty} C_i^{(k)} \left(\frac{h}{q}\right)^{p_i} - \sum_{i=k}^{+\infty} C_i^{(k)} h^{p_i}}{q^{p_k} - 1} =$$

$$= f(x) + \sum_{i=k}^{+\infty} h^{p_i} \cdot \left[C_i^{(k)} \left(\frac{1}{q^{p_i}} + \frac{\frac{1}{q^{p_i}} - 1}{q^{p_k} - 1} \right) \right]$$

Cuando $i = k$ tenemos: $C_k^{(k)} \left(\frac{1}{q^{p_k}} + \frac{\frac{1}{q^{p_k}} - 1}{q^{p_k} - 1} \right) = C_k^{(k)} \left(\frac{1}{q^{p_k}} + \frac{1 - q^{p_k}}{q^{p_k} - 1} \cdot \frac{1}{q^{p_k}} \right) = 0$.

Denotemos por: $C_i^{(k+1)} = \left[C_i^{(k)} \left(\frac{1}{q^{p_i}} + \frac{\frac{1}{q^{p_i}} - 1}{q^{p_k} - 1} \right) \right]$, para $i \geq k+1$.

Tenemos entonces que:

$$\bar{f}_{k+1}(x,h) = f(x) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} C_i^{(k+1)} h^{p_i}.$$

c) El estimador $(n+1)$-ésimo $\bar{f}_{n+1}(x,h)$ respecto al n-ésimo $\bar{f}_n(x,h)$ no posee el término en h^{p_n} y los términos exponentes en h son superiores a p_n. Es un mejor estimador de $f(x)$.

Problema 2 (35 puntos)

a) Ver Teórico.

b) Ver Teórico.

c) Ver Teórico.

d) Queremos aplicar NR a $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2^2 - 1, 2x_1 - 4x_2 + 1)$ partiendo de $X_0 = (0,0)$ y calcular X_1.

Tenemos que:

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4x_2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Para computar X_1 tenemos que calcular $p_0 = (p_0^1, p_0^2)^t$ tal que $X_1 - X_0 = p_0$. Por NR tenemos: $J_f(X_0)p_0 = -f(X_0)$. Esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene: $p_0 = (1, \frac{3}{4})$; entonces $X_1 = X_0 + p_0 = (0,0) + (1, \frac{3}{4}) = (1, \frac{3}{4})$.

Problema 3 (35 puntos)

a) Ver Teórico.

b) Ver Teórico.

c) Ver Teórico.

d) En Euler "hacia atrás", tenemos la relación:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Conocemos $f(x, y) = xy + 2y$. Entonces:

$$y_{n+1} = y_n + h\,(x_{n+1}y_{n+1} + 2y_{n+1}) \Rightarrow y_{n+1}(1 - hx_{n+1} - 2h) = y_n,$$

despejando se tiene:

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{(1 - 2h - hx_{n+1})}.$$