Examen - Métodos Numéricos

Miercoles 24 de febrero de 2016

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (30 puntos)

a) Sea $\bar{f}(x,h)$ un estimador de una función $f(x)$ que cumple la siguiente relación:

$$\bar{f}(x,h) = f(x) + C_p h^p + O(h^r),$$

donde C_p es una constante no nula y $O(h^r)$ es un infinitésimo en h^r, con $r > p \geq 1$.
Demostrar la siguiente relación (Extrapolación de Richardson) vía la eliminación del término $C_p h^p$:

$$\frac{q^p \bar{f}(x,h/q) - \bar{f}(x,h)}{q^p - 1} = f(x) + \hat{O}(h^r),$$

con q constante elegida mayor a 1.

b) Supongamos ahora que la relación entre el estimador inicial $\bar{f}_1(x,h)$ y la función $f(x)$ viene dada por: $\bar{f}_1(x,h) = f(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} C_i^{(1)} h^{p_i}$, donde las $\{C_i^{(1)}\}_{i\geq 1}$ son constantes no nulas y los exponentes $\{p_i\}_{i\geq 1}$ satisfacen $1 \leq p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$. Partiendo de este estimador, se define la recursión:

$$\bar{f}_{k+1}(x,h) = \frac{q^{p_k} \bar{f}_k(x,h/q) - \bar{f}_k(x,h)}{q^{p_k} - 1},\ k \geq 1$$

Demostrar mediante inducción que: $\bar{f}_n(x,h) = f(x) + \sum_{i=n}^{+\infty} C_i^{(n)} h^{p_i}$, para ciertas constantes $\{C_i^{(n)}\}_{i\geq n}$ no nulas.

c) ¿Qué ventaja tiene el estimador $(n+1)$-ésimo $\bar{f}_{n+1}(x,h)$ con respecto al n-ésimo $\bar{f}_n(x,h)$?

Problema 2 (35 puntos)

Se quiere hallar una solución α de la ecuación no lineal $f(\vec{x}) = \vec{0}$, con $f : R^n \to R^n$. Dada $g : R^n \to R^n$ con punto fijo α, se considera la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por el MIG:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n),\ n \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

a) Definir orden y velocidad de convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Sea $g : R \to R$ de clase C^p, $\alpha \in \mathbb{R}$ punto fijo de g y x_0 elegido de modo que la sucesión dada por el MIG converge a α. Probar que si las derivadas i-ésimas de g verifican: $g^{(i)}(\alpha) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, p-1$, pero $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene orden de convergencia p y velocidad $\beta = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!}$.

c) Describir el Método de Newton-Raphson (NR) para encontrar la raíz de la ecuación $f(\vec{x}) = \vec{0}$, con $f : R^n \to R^n$. Ilustrar con un dibujo para el caso $n = 1$.

d) Sea $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2^2 - 1, 2x_1 - 4x_2 + 1)$. Partiendo de $X_0 = (0,0)$ calcular X_1 aplicando NR.

Problema 3 (35 puntos)

a) Describir el método de Euler hacia atrás para la resolución de una EDO con condiciones iniciales dadas.

b) Obtener un método predictor-corrector, incorporando el uso de Euler hacia adelante.

c) Se considera el método que se obtiene de la parte anterior, con un único paso del corrector y para el caso de $n = 1$ variable independiente. Calcular la región de estabilidad.

d) Sea $f(x,y) = xy + 2y$. Aplicar la fórmula de Euler hacia atrás a la EDO definida por f, y mostrar que y_{n+1} se puede expresar explícitamente en términos de y_n y x_{n+1}, es decir, una ecuación no implícita en este caso.