Examen - Métodos Numéricos

5 de Febrero de 2016

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (30 puntos)

a) Definir el Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL).
b) Demostrar que el conjunto solución del PMCL coincide con el conjunto solución de las ecuaciones normales.
c) Se observa que los tres puntos $(0,1),(1,2),(2,4)$ no están alineados.
Hallar la recta que minimiza el error y graficar los datos junto con la solución obtenida.

Problema 2 (35 puntos)

a) Explicar el método de Hermite global que interpola una función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ en $n+1$ puntos.
b) Expresar el polinomio interpolante de Hermite de la función $f(x) = sen(x)$ por los puntos $x_0 = 0$ y $x_1 = \pi/4$.
c) Hallar una cota superior para el error de interpolación en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Problema 3 (35 puntos)

Se considera el sistema lineal $Ax = b$ con A invertible. Para estimar su solución α se propone la siguiente iteración estacionaria:

$$\begin{cases} x_{n+1} = Qx_n + r, \; n \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Siendo Q una matriz tal que $\alpha = Q\alpha + r$ y r un vector constante.

a) Demuestre que la sucesión x_n converge a α, para toda condición inicial x_0, si y sólo si $\rho(Q) < 1$.
b) Dar una condición suficiente para la convergencia de Jacobi y Gauss-Seidel en términos de la matriz A.
c) Se considera $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$. Sin calcular $\rho(Q)$, indicar un rango de valores de β que asegure convergencia de Jacobi y Gauss-Seidel.
d) Estudiar la convergencia de Jacobi para la matriz anterior en el caso $\beta = -\frac{1}{2}$.

Fundamentar detalladamente cada respuesta.