Solución Examen - Métodos Numéricos

Martes 15 de diciembre de 2015

Problema 1 (35 puntos)

a)

Teorema 1. *Sea f de clase C^{n+1} en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma(x) \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:*

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\gamma(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Demostración. Tomemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$ para algún i, la igualdad es evidente, pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n+2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase $\mathcal{C}^{n+1}$, resulta que F también es de clase $\mathcal{C}^{n+1}$. Sean $p_0 < p_1 \ldots < p_{n+1}$ las $n+2$ raíces de F. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n+1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para F'. Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma(x) \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n+1$ es nula. Entonces, al derivar $n+1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma(x)) - (n+1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado. □

b) El polinomio interpolante a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ por las abscisas $\{-1, 0, 1\}$ es $p_2(x) = \frac{1}{2} l_{-1}(x) + l_0(x) + \frac{1}{2} l_1(x)$, siendo $l_{-1}(x) = \frac{1}{2} x(x-1)$, $l_0(x) = (x+1)(x-1)$ y $l_1(x) = \frac{1}{2} x(x+1)$ los polinomios base de Lagrange. Operando se consigue que $p_2(x) = -\frac{1}{2} x^2 + 1$.

c) Una cota posible para el error es $E_{max} \leq \|f^{(3)}\|_\infty \frac{2^3}{3!}$. Al tomar tres derivadas de f se consigue que $\max_{[-1,1]} |f^{(3)}(x)| \leq \max_{[-1,1]} \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \leq \frac{\max_{[-1,1]} 24x(1-x^2)}{\min_{[-1,1]} (1+x^2)^4} = 24$. Luego, una cota superior para el error (que no es rígida) es $c = 48 \times \frac{8}{6} = 64$.

d) La función de Runge es $g(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. Se observa que al interpolar de manera equiespaciada con polinomios, la función error crece a medida que aumentamos la cantidad de puntos. Esto ocurre porque el máximo de la derivada n-ésima de la función de Runge supera el orden factorial. Conviene entonces tomar abscisas no equiespaciadas, como por ejemplo en los nodos de Chebyshev.

Problema 2 (35 puntos)

a) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 en un entorno de la raíz α de f y $f'(\alpha) \neq 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la sucesión (x_n) generada por el método de Newton converge a α, con orden al menos cuadrático, para toda semilla $x_0 \in B_\varepsilon(\alpha)$.

Para calcular la tasa de convergencia, sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ de modo que la sucesión generada por el método de Newton está dada por la recurrencia $x_{n+1} = g(x_n)$ si $n \geq 0$. Un cálculo directo muestra que $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = 0$ y $g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$, por lo que el desarrollo de Taylor de segundo orden de g en torno de α resulta

$$g(x) = \alpha + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x-\alpha)^2 + R_2(x), \quad \text{donde} \quad \frac{R(x)}{(x-\alpha)^2} \to 0 \quad \text{cuando } x \to \alpha.$$

Asumiendo que $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $x_n \to \alpha$, de la expresión anterior evaluada en $x = x_n$, usando que $g(x_n) = x_{n+1}$, se obtiene

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} + \frac{R(x_n)}{(x_n-\alpha)^2} \to \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}, \quad \text{pues} \quad \frac{R(x_n)}{(x_n-\alpha)^2} \to 0.$$

Luego el orden de convergencia de (x_n) a α es al menos cuadrático, siendo cuadrático con tasa $\frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}$ cuando $f''(\alpha) \neq 0$.

b) Dada $f(x) = x^2$ y $x_0 \neq 0$ la sucesión generada por el método de Newton viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n, \quad \text{luego} \quad x_n = \frac{1}{2^n}x_0.$$

Para calcular el orden de convergencia a la raíz $\alpha = 0$ se calcula

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{x_0}{2^{n+1}} = (x_n - \alpha)\frac{x_0}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = \frac{x_0}{2} \neq 0.$$

Por lo tanto, el orden de convergencia es 1.

c) Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene una raíz $\alpha \in \mathbb{R}^n$ que se quiere hallar, el método de Newton-Raphson propone considerar una aproximación inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de α, y a partir de ella obtener, sucesivamente, mejores aproximaciones. De forma que si x_n es la aproximación que se tiene en el paso $n \geq 0$, entonces x_{n+1} se toma como la solución del sistema lineal que se obiene al reemplazar en la ecuación $f(x) = 0$, $f(x)$ por su aproximción lineal (polinomio de Taylor de orden 1) en torno al punto x_n, a saber $f(x) \simeq f(x_n) + \mathrm{J}f(x_n)(x - x_n)$.

Para resolver el sistema lineal mencionado, $f(x_n) + \mathrm{J}f(x_n)(x - x_n) = 0$, es usual realizar el cambio de variables $\delta = x - x_n$, con lo cual x_{n+1} viene dado por

$$\begin{cases} \mathrm{J}f(x_n)\delta = -f(x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \delta. \end{cases}$$

Algunas de las condiciones de parada para el método son las siguientes.

(i) Parada por número de iteraciones. El algoritmo se detiene cuando el número de iteraciones llega a una cantidad fijada de antemano. Es adecuado cuando no se conoce el comportamiento del método para la función f considerada o también en conjunción con otras condiciones de parada que pudieran no satisfacerse a lo largo de la recursión. La condición evita que el algoritmo entre en un ciclo sin fin.

(ii) Parada por proximidad a la raíz α. Es adecuada cuando lo que se desea es hallar, con determinada precisión, la raíz α. Se busca detener el algoritmo cuando el error $\|x_n - \alpha\|$, o bien el error relativo $\frac{\|x_n-\alpha\|}{\|\alpha\|}$, es menor que cierta tolerancia $\varepsilon > 0$ fijada de antemano. Como no se conoce a priori la raíz α, se hace la estimación $\alpha \simeq x_{n+1}$ con lo que el método se detiene si

$$\|x_n - x_{n+1}\| < \varepsilon, \quad \text{o bien si} \quad \frac{\|x_n - x_{n+1}\|}{\|x_{n+1}\|} < \varepsilon.$$

(iii) Parada por proximidad a la anulación de f. Se utiliza cuando lo que se pretende es hallar valores de las variables que hagan que $f(x)$ sea pequeño. La condición de parada es $\|f(x_n)\| < \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es una tolerancia fijada de antemano.

d) Considérese la función $h(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}$, de modo que la raíz positiva $\alpha = \sqrt{2}$ de f es punto fijo de h y la recursión propuesta es $x_{n+1} = h(x_n)$, $n \geq 0$.

(i) Para $g(x) = x$, un cálculo prueba que $h(x) = \frac{2}{x}$ y $h'(x) = -\frac{2}{x^2}$. Cuando $x \in [x_0, \alpha]$, $h'(x) \in [-2, -1]$, por lo que no se verificará $|h'(x)| < 1$ en ningún intervalo cerrado que contenga a α y x_0, y en consecuencia, no se puede deducir que h sea contractiva y por ende, que (x_n) converja.
Por otro lado, si (x_n) convergiera a α, lo haría con orden 1, en virtud del teorema de orden de convergencia de un MIG, ya que $h'(\alpha) = -1$ es la primera derivada de h no nula en α.

(ii) En el caso $g(x) = 2x$, que corresponde usar el método de Newton (pues $f'(x) = 2x$), se tiene que $h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \in [-\frac{1}{2}, 0]$, si $x \in [x_0, \alpha]$. Por lo tanto, $|h'(x)| \leq 1/2 < 1$ en $[x_0, \alpha]$, de donde se deduce que h es contractiva y que (x_n) converge.
Finalmente, la convergencia es cuadrática (orden 2) ya que $h'(\alpha) = 0$ pero $h''(\alpha) = \alpha^{-1} \neq 0$. Elegimos por lo tanto la segunda función.

Problema 3 (30 puntos)

a) El Problema de Valores Iniciales consiste en hallar la función incógnita $y(t)$ de la ecuación diferencial $y'(t) = f(t, y(t))$ sujeta al dato inicial $y(t_0) = a$, siendo $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$.

b) El Problema Test es el siguiente Problema de Valores Iniciales: $y'(t) = qy(t)$, con dato inicial $y(0) = 1$, siendo q un número complejo arbitrario. Dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por un método iterativo con paso h, su región de estabilidad es el conjunto de números complejos $z = qh$ tales que la sucesión permanece acotada:

$$R = \{z \in \mathbb{C} : \exists K \in \mathbb{R}, |y_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}\}. \tag{1}$$

c) El método de Euler consiste en la iteración $y_0 = a$, $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, siendo $t_n = t_0 + nh$. Al aplicar el método de Euler hacia adelante al Problema Test resulta $y_0 = 1$, $y_{n+1} = y_n + hqy_n = (1 + z)y_n$, siendo $z = hq$. Por inducción se prueba que $y_n = (1 + z)^n$.
Luego, su región de estabilidad es $R = \{z \in \mathbb{C} : |1 + z| \leq 1\}$.

d) La familia de métodos de Runge-Kutta se definen como $y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n, h, f)$, siendo $F(t_n, y_n, h, F) = \sum_{i=1}^{s} b_i K_i$ y $K_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j)$, $i = 1, \ldots, s$.
Se deduce entonces que el método de Euler hacia adelante pertenece a la familia de Runge-Kutta, tomando $s = 1$ etapa, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$ y $a_{11} = 0$.

e) La aplicación de dos pasos del método de Euler hacia adelante al PVI $y' = ye^y + t$ con dato inicial $y(0) = 0$ resulta en $y_0 = 0$, $y_1 = y_0 + \frac{1}{2}f(0, 0) = 0$, y finalmente $y_2 = y_1 + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$.