Examen - Métodos Numéricos

Martes 15 de diciembre de 2015

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

a) Enunciar y demostrar el Teorema de Error por Interpolación Polinómica.
b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, y p el polinomio interpolante de f por las abscisas $\{-1, 0, 1\}$. Expresar p en su forma general $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.
c) Hallar alguna cota superior para el error obtenido de usar el polinomio p en lugar de f, es decir, de $E_{max} = \max_{x\in[-1,1]} |p(x) - f(x)|$.
d) Explicar el fenómeno de Runge.

Problema 2 (35 puntos)

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enunciar las condiciones bajo las cuales el método de Newton-Raphson es convergente con orden cuadrático a α.
Demostrar que en tal caso, la tasa de convergencia vale $\beta = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}$.
b) Calcular el orden de convergencia hacia la raíz de la función $f(x) = x^2$ al utilizar el método de Newton-Raphson.
c) Explicar el método de Newton-Raphson para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Dar condiciones de parada del método.
d) Se desea estimar numéricamente la raíz positiva de $f(x) = x^2 - 2$ mediante un MIG, donde $x_0 = 1$ y $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{g(x_k)}$, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se debe elegir. Fundamentar la elección de una de las siguientes funciones:
- $g(x) = x$
- $g(x) = 2x$

Problema 3 (30 puntos)

a) Definir el Problema de Valores Iniciales.
b) Definir el Problema Test y la Región de Estabilidad de un método iterativo.
c) Definir el método de Euler hacia adelante. Calcular su región de estabilidad.
d) Definir la familia de métodos de Runge-Kutta.
Mostrar que Euler hacia adelante pertenece a tal familia.
e) Aplicar dos pasos del método de Euler hacia adelante con paso $h = 1/2$ en el intervalo $[0, 1]$ para el Problema de Valores Iniciales $y' = ye^y + t$ con $y(0) = 0$.

Fundamentar detalladamente cada respuesta.