Solución Examen - Métodos Numéricos

Jueves 30 de julio de 2015

Problema 1 (35 puntos)

(i) El método del Trapecio en EDOs proviene de aproximar la expresión integral de una EDO mediante un trapecio. Si $y'(t) = f(t, y)$ tiene dato inicial $y(t_0) = y_0$, el método del Trapecio consiste en la siguiente recursión implícita de orden 1:

$$y_0 = y(t_0),$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})).$$

Obsérvese que y_{n+1} también figura en el segundo miembro, como coordenada de evaluación de f. En el caso solicitado, se aplica el método del Trapecio al modelo epidémico SIR cuando $\alpha = \beta = 1$, y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineal con dato inicial y_0 conocido:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{h}{2}(-s_n i_n - s_{n+1} i_{n+1})$$
$$i_{n+1} = i_n + \frac{h}{2}(s_n i_n - i_n + s_{n+1} i_{n+1} - i_{n+1})$$
$$r_{n+1} = r_n + \frac{h}{2}(i_n + i_{n+1})$$

(ii) El vector incógnita del sistema anterior es $y_{n+1} = (s_{n+1}, i_{n+1}, r_{n+1})$. Sumando las tres ecuaciones anteriores se consigue que $s_{n+1} + i_{n+1} + r_{n+1} = s_n + i_n + r_n$, y por inducción se prueba que $s_{n+1} + i_{n+1} + r_{n+1} = s_0 + i_0 + r_0 = 1$. Sustituyendo $i_{n+1} = 1 - r_{n+1} - s_{n+1}$ en las ecuaciones primera y tercera y luego despejando s_{n+1}, se deduce que s_{n+1} es la raíz de la siguiente ecuación cuadrática:

$$\frac{h}{2+h} s_{n+1}^2 + (k_n \frac{h}{2+h} - \frac{2+h}{2}) s_{n+1} + (s_n - \frac{h}{2} s_n i_n) = 0,$$

siendo $k_n = r_n + \frac{h}{2} i_n + \frac{h}{2}$, y s_{n+1} es la raíz que verifica $s_{n+1}\ in[0, 1]$. Luego es posible despejar r_{n+1}:

$$r_{n+1} = \frac{2k_n - h s_{n+1}}{2+h},$$

y finalmente $i_{n+1} = 1 - r_{n+1} - s_{n+1}$.
Esta resolución fue omitida en la evaluación.

(iii) Mediante directa evaluación de la solución exacta es posible obtener dos pasos del método del Trapecio con paso $h = 1$ sabiendo que $y_0 = (s_0, i_0, r_0) = (1/2, 1/2, 0)$ se tiene: $y_1 = (0{,}329; 0{,}445; 0{,}226)$, $y_2 = (0{,}231; 0{,}555; 0{,}214)$.

En esta solución también se valoraba métodos aproximados, como predictor-corrector o de punto fijo (Newton-Raphson para sistemas no lineales). El método del Trapecio tiene orden de consistencia cuadrático. Luego, su error local o de truncamiento es cúbico, y se puede mejorar mediante el uso de la Extrapolación de Richardson (tomando por ejemplo paso de la mitad de longitud y eliminando el orden dominante).

Problema 2 (35 puntos)

(i) El Problema Test es la siguiente EDO:

$$y' = qy$$
$$y(0) = 1,$$

siendo q un número complejo arbitrario.

(ii) Dado un método iterativo que genera una sucesión $\{y_n\}$ al aplicar el Problema Test, su región de estabilidad R es el conjunto de complejos $z = hq$ tales que la sucesión $\{y_n\}$ permanece acotada. Formalmente:

$$R = \{z = hq \in \mathbb{C} : \exists k > 0, |y_n| < k, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

(iii) Considérese la EDO $y'(t) = f(t, y)$ con dato inicial $y(t_0) = y_0$.
Mediante integración en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ se tiene la siguiente identidad:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt.$$

El método de Euler hacia adelante se obtiene de estimar la segunda integral mediante un rectángulo con altura y_n. Nótese que se conoce y_0:

$$y_{n+1} - y_n = hf(t_n, y_n)$$

(iv) Calculemos la región de estabilidad para el método de Euler hacia adelante. Al aplicar Euler hacia adelante al Problema Test tenemos que:

$$y_{n+1} = y_n + h(qy_n) = (1 + hq)y_n = (1 + z)y_n.$$

Por inducción completa se obtiene que $y_n = (1+z)^n y_0 = (1+z)^n$. Esta sucesión permanece acotada si y solamente si $|1+z| \leq 1$. En términos gráficos, el complejo $z = hq$ debe permanecer dentro del disco unidad centrado en el complejo $-1+0i$.

v La iteración correspondiente a la EDO con $f(x, y) = x^2y^2 + log(y)$ es:

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n^2 y_n^2 + log(y_n)).$$

Partiendo de $y_0 = 1$ y paso $h = 1/10$ tenemos $y_1 = 1$, $y_2 = 1,001$, $y_3 \approx 1,005$.

Problema 3 (30 puntos)

(i) Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a α en un espacio normado. Su orden de convergencia es el número real $p > 0$ que verifica la siguiente condición:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1} - \alpha\|}{\|x_n - \alpha\|^p} = \beta > 0.$$

Al número real β se le llama tasa de convergencia.

(ii) El error del paso $n+1$ es $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$, por ser α punto fijo de g. Para cada natural n, apliquemos un desarrollo de Taylor de $g(x_n)$ centrado en α. Como las derivadas de g son todas nulas hasta $p-1$ inclusive, tenemos que:

$$|e_{n+1}| = |g(x_n) - g(\alpha)| = |\frac{g^{(p)}(\gamma_n)}{p!}||x_n - \alpha|^p = \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!}|e_n|^p,$$

para cierto γ_n comprendido entre x_n y α. Como sabemos que x_n converge a α, entonces $d(\gamma_n, \alpha) \leq d(x_n, \alpha) \to 0$, y en particular la sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a α. Como la función $|g^{(p)}|$ es continua, entonces $|g^{(p)}|(\gamma_n) \to |g^{(p)}|(\alpha)$. Reescribiendo, para todo n existe γ_n comprendido entre α y x_n tal que:

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!}$$

Finalmente, tomando límite con n tendiendo a infinito, tenemos que:

$$\lim_n \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lim_n \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!} = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} = \beta,$$

Por hipótesis $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Por definición tenemos que el orden de convergencia del MIG es p, y su tasa es $\beta > 0$.

(iii) El método de Newton Raphson consiste en la siguiente iteración:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Puesto que $f(\alpha) = 0$, tenemos que $g(\alpha) = \alpha$. Además, como f tiene segunda derivada continua en un entorno de α deduciremos que g también, y aplicaremos el teorema anterior. Derivando:

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Esta derivada está definida en α pues $f'(\alpha) \neq 0$. Evaluando en $x = \alpha$:

$$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0,$$

donde hemos usado que $f(\alpha) = 0$. Calculemos ahora la derivada segunda de g en $x = \alpha$, utilizando que $f(\alpha) = 0$:

$$g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \neq 0,$$

pues por hipt́esis tenemos que $f'(\alpha)$ $neq0$. Por el teorema anterior, el orden de convergencia de este método es cuadrático, y su tasa de convergencia es:

$$\beta = \frac{|g''(\alpha)|}{2} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}.$$