Examen - Métodos Numéricos

Jueves 30 de Julio de 2015

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

Se considera el siguiente sistema de EDO:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\beta s(t)i(t) \tag{1}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \tag{2}$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \gamma i(t), \tag{3}$$

con dato inicial $(s(0), i(0), r(0)) = (1/2, 1/2, 0)$, y $\alpha = \beta = 1$.

i) Plantear el sistema no lineal de ecuaciones que debe resolverse para aplicar el método del Trapecio.

ii) Resolver de forma exacta el sistema no lineal anterior. Sugerir un método numérico apto para sistemas no lineales, en caso de no hallar una solución exacta.

iii) Avanzar hasta $t = 2$ partiendo de $t = 0$ y con paso $h = 1$, utilizando el método del Trapecio. Citar el orden de convergencia del método del Trapecio, y proponer un método que logre reducir el orden de truncamiento de las estimaciones numéricas para $s(2), i(2)$ y $r(2)$. Justificar.

Problema 2 (35 puntos)

Dada una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de la forma $y' = f(x, y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$. Se pide:

i) Definir Problema Test de un método iterativo para una EDO.

ii) Definir Región de Estabilidad.

iii) Describir el Método de Euler (Deducción, ecuación de recurrencia, etc.).

iv) Deducir la región de estabilidad para este método.

v) Plantear el Método de Euler para $f(x, y) = x^2y^2 + \log(y)$, con $x \in [0, 1]$ y condición inicial $y(0) = 1$. Hallar y_3 con paso $h = \frac{1}{10}$.

Problema 3 (30 puntos)

i) Definir orden de convergencia de una sucesión $\{x_n\}$.

ii) Sea $g(x) = x$ una ecuación, con α punto fijo de $g(\cdot)$.
Asumiendo $g(\cdot)$ continua y con $p \geq 1$ derivadas continuas en un entorno de α, y además que $\frac{d^k g}{dx^k}(\alpha) = 0$, $\forall k \in 1...p-1$, $\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha) \neq 0$, demostrar que el orden de convergencia del MIG es p, con constante $\beta = \frac{1}{p!}\left|\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha)\right|$.

iii) Sea $f(x)$ con derivada segunda continua en un entorno de la raíz α y tal que $f'(\alpha) \neq 0$. Demostrar que la sucesión generada por Newton-Raphson converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo, y además la convergencia es cuadrática con constante $\beta = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.