Examen - Métodos Numéricos - Solución

Miercoles 25 de Febrero de 2015

Solución Problema 1 (35 puntos)

i) Ver teórico.

ii) Aplicamos el método RK:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))\right),$$

al Problema Test $y' = qy$, $y(0) = 1$. Obteniendo la ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + hqy_n + \frac{(hq)^2}{2}y_n.$$

Con lo cual: $y_{n+1} = y_n(1+hq+\frac{(hq)^2}{2})$. Expandiendo la recursión tenemos: $y_{n+1} = y_0\left(1 + hq + \frac{(hq)^2}{2}\right)^{n+1}$. Por definición de Región de Estabilidad, queremos que los $\{y_n\}$ estén acotados:

$$|y_{n+1}| = |y_0| \cdot \left|1 + hq + \frac{(hq)^2}{2}\right|^{n+1},$$

y la sucesión estará acotada si $|1 + hq + \frac{(hq)^2}{2}| \leq 1$. Sea $z = hq$. La región de estabilidad viene dada entonces por:

$$R_e = \left\{z \in \mathbf{C} \text{ tal que } |1 + z + \tfrac{z^2}{2}| \leq 1\right\}.$$

iii) Ver teórico.

iv) Ver teórico.

Solución Problema 2 (35 puntos)

i) Ver teórico.

ii) Ver teórico.

iii) Se quiere resolver $f(x) = x^3 - 1 = 0$. Para ello se plantea:

a) Utilizar el MIG $x_{i+1} = g(x_i)$ con $g(x) = x^3 + x - 1$ con $x_0 = \frac{3}{4}$. ¿Es convergente el método?.
Tenemos que $g'(x) = 3x^2 + 1$ siendo el punto fijo de $g(\cdot)$ $x = 1$. Como $g'(1) = 4 > 1$ el MIG no es convergente cualquiera sea el punto inicial que se tome.

b) Utilizar Newton-Raphson partiendo de $x_0 = \frac{3}{4}$. ¿Es convergente el método?. Computar x_1 en este caso y los errores absolutos en $\{x_0, x_1\}$ respecto a la raíz de $f(x) = 0$.
En este caso la aplicación de NR lo podemos ver como un MIG de la forma $x_{i+1} = g(x_i)$ con $g(x) = x - \frac{x^3-1}{3x^2}$. Calculamos $g'(1)$: $g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^3}$, evaluado en $x = 1$ tenemos $g'(1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ con lo cual NR es convergente ($|g'(1)| = 0 < 1$).

$$x_1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{(\frac{3}{4})^3 - 1}{3(\frac{3}{4})^2}\right) = \frac{472}{432}.$$

Los errores absolutos en $\{x_0, x_1\}$ son: $E_0 = |1 - \frac{3}{4}| = 1/3 \approx 0{,}333333$; $E_1 = |1 - \frac{472}{432}| \approx 0{,}092592$.

Solución Problema 3 (30 puntos)

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados: (PMC) $min_x \|b - Ax\|_2$, con $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, con $m > n$. Se pide:

i) Ver teórico.
ii) Ver teórico.