Examen - Métodos Numéricos

Miercoles 25 de Febrero de 2015

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

i) Definir problema test y región de estabilidad para un método numérico utilizado en la resolución de una EDO.

ii) Se considera el siguiente método de Runge-Kutta, denominado método de Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))\right)$$

Calcular su región de estabilidad. No es necesario graficarla.

iii) Definir error global y error local para un método numérico utilizado en la resolución de una EDO.

iv) Describir el Método de Euler "hacia adelante" y probar que este tiene error local de truncamiento de orden 2.

Problema 2 (35 puntos)

i) Definir orden de convergencia de una sucesión $\{x_n\}$.

ii) Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ con derivada continua y $\alpha \in (a, b)$ un punto fijo de g. Demostrar que:

a) Si $|g'(\alpha)| < 1$, la iteración MIG converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo. Y además se cumple que: $|\alpha - x_{n+1}| \leq k \cdot |\alpha - x_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si $|g'(\alpha)| > 1$ la iteración MIG no converge a α.

iii) Se quiere resolver $f(x) = x^3 - 1 = 0$. Para ello se plantea:

a) Utilizar el MIG $x_{i+1} = g(x_i)$ con $g(x) = x^3 + x - 1$ con $x_0 = \frac{3}{4}$. ¿Es convergente el método?

b) Utilizar Newton-Raphson partiendo de $x_0 = \frac{3}{4}$. ¿Es convergente el método? Computar x_1 en este caso y los errores absolutos en $\{x_0, x_1\}$ respecto a la raíz de $f(x) = 0$.

Problema 3 (30 puntos)

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados: (PMC) $min_x\|b - Ax\|_2$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, con $m > n$. Se pide:

i) Enunciar y demostrar el Teorema de descomposición QR de una matriz A.

ii) Mostrar cómo utilizar la descomposición QR para resolver el PMC.