Examen - Métodos Numéricos - Solución

Miercoles 4 de Febrero de 2015

Solución Problema 1 (35 puntos)

Dado un método iterativo, de la forma: $x_{k+1} = Qx_k + r$. Con $x_k \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathcal{M}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{R}^n$.

i) Sabemos que $e^{(0)} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$ y además que el error en el k-ésimo paso satisface $e^{(k)} = Q^k e^{(0)}$. Con lo cual:

$$e^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} Q^k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k \alpha_i v_i = (\lambda_1)^k \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i)^k \alpha_i v_i,$$

de la misma manera tenemos que:

$$e^{(k+1)} = (\lambda_1)^{k+1} \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i)^{k+1} \alpha_i v_i.$$

Entonces:

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\|e^{(k+1)}\|}{\|e^{(k)}\|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\|(\lambda_1)^{k+1}\alpha_1 v_1 + (\lambda_1)^{k+1} \sum_{i=2}^{n} \frac{(\lambda_i)^{k+1}}{(\lambda_1)^{k+1}} \alpha_i v_i\|}{\|(\lambda_1)^{k}\alpha_1 v_1 + (\lambda_1)^{k} \sum_{i=2}^{n} \frac{(\lambda_i)^{k}}{(\lambda_1)^{k}} \alpha_i v_i\|} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\|(\lambda_1)^{k+1}\alpha_1 v_1\|}{\|(\lambda_1)^{k}\alpha_1 v_1\|} = |\lambda_1|.$$

ii) Al sumar tendremos $Q^t + Q = 0$ con lo cual $2q_{ii} = 0$, $\forall i \in 1..n$, entonces: $q_{ii} = 0$, $\forall i \in 1..n$ (los terminos de la diagonal son cero en una matriz antisimétrica). Aplicando el Teorema de Gershgorin (a matrices antisimétricas) los valores propios de Q están en discos $\{D_i\}_{i\in 1..n}$ del plano complejo centrados en $(0,0)$ y radios $r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |q_{ij}|$, $\forall i \in 1..n$. Por hipótesis sabemos que $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |q_{ij}| < 1$, $\forall i \in 1..n$, entonces claramente los discos D_i están incluidos estrictamente dentro del círculo de radio 1 del plano complejo con centro en $(0,0)$. Con lo cual $\rho(Q) < 1$ y por lo tanto el método es convergente en este caso.

iii) Haremos la demostración por inducción en k.
Paso Base: k=1.
Tenemos que: $x_1 = Qx_0 + r = Qx_0 + 0Qr + r$.
Paso Inductivo:
H.I.) Se asume que $x_h = Qx_0 + (h-1)Qr + r$.
T.I.) Queremos probar que: $x_{h+1} = Qx_0 + hQr + r$.

$$x_{h+1} = Qx_h + r = Q(Qx_0 + (h-1)Qr + r) + r = Q^2 x_0 + hQ^2 r - Q^2 r + Qr + r =$$

$$= Qx_0 + hQr - Qr + Qr + r = Qx_0 + hQr + r,$$

como se quería. Por tanto $x_{k+1} = Qx_0 + kQr + r$. Y no hay convergencia, basta pasar al límite con $k \to +\infty$, siempre que $Qr \neq 0$.

iv) Ver teórico.

v) $Q = M^{-1}(M - A)$. Denotando $A = D - E - F$, donde $-E$ es la matriz subdiagonal inferior y $-F$ es la matriz por encima de la diagonal D; en Jacobi se tiene: $Q_J = D^{-1}(E + F)$ (se toma $M = D$). En Gauss-Seidel se tiene: $Q_{GS} = (D - E)^{-1}(F)$ (se toma $M = D - E$). En el caso de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ tendremos que: $Q_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, y sus valores propios son $1/2$ y $-1/2$ con lo cual $\rho(Q_J) = \frac{1}{2}$. Además $Q_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, y sus valores propios son 0 y $1/4$ con lo cual $\rho(Q_{GS}) = \frac{1}{4}$. Gauss-Seidel convergerá el doble de rápido que Jacobi en este caso.

Solución Problema 2 (35 puntos)

i) Ver teórico.

ii) Sea $f(x,y,z) = (xy - z^2, y^2 - xz, 2x^2 - yxz - 1)$. Tomando $X_0 = (1,1,0)$, calcular X_2 aplicando Newton-Raphson.
El método de NR viene dado por:
$J_f(X_k)p_k = -f(X_k)$, el vector de avance p_k viene dado por $p_k = X_{k+1} - X_k$ que una vez computado se calcula $X_{k+1} = X_k + p_k$ y se sigue iterando hasta llegar a la condición de parada. Se parte de un X_0 inicial.
En este caso la matriz Jacobiana $J_f(\cdot)$ viene dada por: $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & -2z \\ -z & 2y & -x \\ 4x - yz & -xz & -yx \end{pmatrix}$.
Por otro lado $f(1,1,0) = (1,1,1)^t$. Para calcular X_1 tenemos el sistema:
$J_f(1,1,0)p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^{(1)} \\ p_0^{(2)} \\ p_0^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -f(1,1,0).$
Resolviendolo tenemos $p_0 = (p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, p_0^{(3)})^t = (-1/3, -2/3, -1/3)^t$, y

$$X_1 = X_0 + p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Analogamente para computar X_2 se debe plantear y resolver el sistema: $J_f(X_1)p_1 = -f(X_1)$ y luego realizar $X_2 = X_1 + p_1$.

iii) El cálculo de las n^2 posiciones de la matriz Jacobiana, más la solución del sistema $n \times n$ en cada iteración puede ser prohibitivamente costoso. Una alternativa es recalcular la matriz Jacobiana sólo cada una cantidad fija de pasos q, resultando en:

$$J^{(q)}(X_{k+1} - X_k) = -f(X_k),$$

para $k = q, q+1, q+2, ..., q + (q-1)$, y luego se computa $J^{(2q)}$ y se prosigue con el método sin variar la matriz por otras q iteraciones.
En funciones fuertemente no lineales disminuye el órden de convergencia pues la matriz Jacobiana varía substancialmente de una iteración a otra.
Otra forma es la utilización del Método de Steffensen visto en clase de teórico.

iv) Ver teórico.

Solución Problema 3 (30 puntos)

Dada una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de la forma $y' = f(x,y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$. Se pide:

i) Ver teórico.

ii) Ver teórico.

iii) Ver teórico.

iv) Plantear el Método del Trapecio para $f(x,y) = xy^2$ con $x \in [1,2]$ y condición inicial $y(1) = 1$.
Fijado un N los puntos x_n vienen dados por $x_n = 1 + n\frac{(2-1)}{N} = 1 + \frac{n}{N}$, con

$n \in 0..N$. El Método del Trapecio aplicado a $y' = xy^2$ en $[1,2]$ con condición inicial $y(1) = 1$ viene dado por:
$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{1}{2N}\left((1+\frac{n}{N})(y_n)^2 + (1+\frac{n+1}{N})(y_{n+1}^{(k)})^2\right)$, se itera en k hasta alcanzar una tolerancia de, por ejemplo, $|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}| < 10^{-6}$; para dicho valor de k se fija el valor de y_{n+1} y se prosigue con el siguiente punto (y_{n+2}) como iteración de punto fijo.
Como punto de partida en el paso n-ésimo (predictor) podemos tomar

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \frac{1}{N}\left((1+\frac{n}{N})(y_n)^2\right).$$