Examen - Métodos Numéricos

Miercoles 4 de Febrero de 2015

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

Dado un método iterativo, de la forma: $x_{k+1} = Qx_k + r$. Con $x_k \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathcal{M}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{R}^n$.

i) Sean $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ los valores propios de Q que asumiremos reales y satisfaciendo la relación: $\rho(Q) = |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| \geq 0$. Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ los vectores propios de Q asociados a dichos valores propios. Sea $\varphi^{(k)} = \frac{\|e^{(k+1)}\|}{\|e^{(k)}\|}$ (error en el paso k+1 dividido error en el paso k). Si $e^{(0)} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$ para ciertos coeficientes $\{\alpha_i\}_{i\in 1..n}$; demostrar: $\lim_{k\to+\infty} \varphi^{(k)} = |\lambda_1|$.

ii) Demostrar que si Q es antisimétrica ($Q^t = -Q$) y $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |q_{ij}| < 1$, $\forall i \in 1..n$, entonces el método es convergente.

iii) Demostrar que si Q es idempotente ($Q^2 = Q$) podemos establecer la expresión: $x_{k+1} = Qx_0 + kQr + r$. ¿Que puede decir de la convergencia en este caso?.

iv) Para un sistema lineal ($n \times n$) de la forma $Ax = b$ describir en qué consiste el Método de Sobrerelajación (SOR).

v) Calcular y comparar los valores de $\rho(Q_J)$ y $\rho(Q_{GS})$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Problema 2 (35 puntos)

i) Sea $\alpha \in R^n$ la raíz de un Sistema No Lineal $f(X) = 0$ de n ecuaciones con n incógnitas. Describir el Método de Newton-Raphson para Sistemas, asumiendo f diferenciable en los puntos X_i.

ii) Sea $f(x,y,z) = (xy - z^2, y^2 - xz, 2x^2 - yxz - 1)$. Tomando $X_0 = (1,1,0)$, calcular X_2 aplicando Newton-Raphson.

iii) Si se sabe que la matriz jacobiana de f varía poco respecto a su evaluación en los puntos X_k. Plantee una variante del Método de Newton-Raphson que sea adecuado en dichas situaciones, y comente las ventajas que tendría respecto al método original.

iv) Describir el Método de Gauss-Newton para la resolución de un Problema de Mínimos Cuadrados No Lineal.

Problema 3 (30 puntos)

Dada una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de la forma $y' = f(x,y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$. Se pide:

i) Definir Región de Estabilidad de un Método Numérico para una EDO.

ii) Describir el Método de Euler "hacia atrás", y el Método del Trapecio, ámbos como métodos de la forma Predictor-Corrector.

iii) Calcular las regiones de estabilidad de los métodos de (ii).

iv) Plantear el Método del Trapecio para $f(x,y) = xy^2$ con $x \in [1,2]$ y condición inicial $y(1) = 1$.