Examen - Métodos Numéricos

Lunes 15 de Diciembre de 2014

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

i) Definir orden de convergencia de una sucesión $\{x_n\}$.
ii) Sea $g(x) = x$ una ecuación, con α punto fijo de $g(\cdot)$. Asumiendo $g(\cdot)$ continua y con $p \geq 1$ derivadas continuas en un entorno de α, y además que $\frac{d^k g}{dx^k}(\alpha) = 0$, $\forall k \in 1...p-1$, $\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha) \neq 0$, demostrar que el orden de convergencia del MIG es p, con constante $\beta = \frac{1}{p!}\left|\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha)\right|$.
iii) Deducir el Método de Netwon-Raphson para resolver una ecuación $f(x) = 0$, con $f : A \subset R \rightarrow R$.
iv) Sea $f(x)$ con derivada segunda continua en un entorno de la raíz α y tal que $f'(\alpha) \neq 0$.
Demostrar que la sucesión generada por Newton-Raphson converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo, y además la convergencia es cuadrática con constante $\beta = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.

Problema 2 (35 puntos)

i) Deducir la matriz de Vandermonde de un polinomio interpolante de grado n.
ii) Explicar el método de interpolación de Newton.
iii) Expresar el polinomio interpolante por los puntos: $P = \{(0;0);(1;1);(2;2);(3;4)\}$ utilizando el método de Newton.
iv) Explicar el método de Hermite por intervalos que interpola en n puntos una función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ en los mismos n puntos.
v) Expresar el polinomio interpolante de Hermite por intervalos de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ por las abscisas $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

Problema 3 (30 puntos)

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados: (PMC) $min_x \|b - Ax\|_2$, con $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, con $m > n$. Se pide:

a) Deduzca el Sistema de Ecuaciones Normales asociado al PMC.
b) Asumiendo conocida la descomposición LU de A^tA explique cómo podría utilizar dicha información para resolver p Problemas de Mínimos Cuadrados cada uno de la forma: (PMC$_\mathrm{i}$) $min_x \|b_i - Ax\|_2$, con $b_i \in R^m$, $i \in 1..p$.
Calcular en número de operaciones requeridas para resolver los p PMCs en este caso.

Fundamentar detalladamente cada respuesta.