Examen - Métodos Numéricos

Viernes 1 de Agosto de 2014

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

a) Enunciar y demostrar el Teorema del Punto Fijo en una variable real.
b) Enunciar el teorema anterior para varias variables (es decir, en $\mathbb{R}^n$).
c) Se desea hallar un punto fijo de la función $g : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ dada por $g(x,y) = (\frac{1}{10}(1 - y - sen(x+y)), \frac{1}{10}(2 + x + cos(x-y))$. Probar que tal punto fijo existe y es único.
d) Comparar el método de Newton Raphson con el MIG dado por la sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n, y_n)$ con $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$.

Problema 2 (35 puntos)

Dado un método iterativo, de la forma: $x_{k+1} = Qx_k + r$. Con $x_k \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathcal{M}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{R}^n$.

a) Demuestre que $\{x_k\}$ es convergente $\Leftrightarrow \rho(Q) < 1$.
Asuma que Q es diagonalizable.
b) Deduzca las expresiones de Q y r del método de Gauss-Seidel, para un sistema lineal $(n \times n)$ de la forma $Ax = b$.
c) Demuestre que si Q satisface: $-1 < q_{ii} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |q_{ij}| < 1$, $\forall i \in 1..n$, entonces el Método de Gauss-Seidel es convergente.
d) Sea A una matriz real $n \times n$ simétrica definida positiva, entonces admite una descomposición de la forma: $A = L \cdot L^t$, donde L es una matriz triangular inferior con elementos estrictamente positivos en su diagonal, y L^t es la matriz traspuesta de L. Esta descomposición se conoce como Factorización de Cholesky.
Sean m sistemas lineales de la forma $Ax = b_i$, $i \in 1..m$, donde A es simétrica definida positiva; asumiendo conocida la descomposición de Cholesky de la matriz A calcular el número de operaciones que insume la resolución de los m sistemas.

Problema 3 (30 puntos)

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados: (PMC) $min_x \|b - Ax\|_2$, con $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, con $m > n$.
Se pide:

a) i) ¿Qué es la descomposición QR de una matriz $A \in R^{m\times n}$?.
ii) Explique cómo se puede utilizar la descomposición QR para resolver el PMC.
b) Asumiendo $A \cdot A^t$ es simétrica definida positiva explique cómo utilizaría la Factorización de Cholesky para resolver eficientemente p Problema de Mínimos Cuadrados cada uno de la forma: (PMC$_\mathrm{i}$) $min_x \|b_i - Ax\|_2$, con $b_i \in R^m$, $i \in 1..p$.

Fundamentar detalladamente cada respuesta.