Solución Examen - Métodos Numéricos

Martes 25 de febrero de 2014

Problema 1 (35 puntos)

a) El polinomio interpolante que pasa por los $n+1$ puntos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

es un polinomio de grado n, $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ que cumple las $n+1$ condiciones:

$$P(x_i) = y_i, \;\; i = 0, 1, \dots, n$$

Esto se traduce en un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_n$:

Este sistema puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes del sistema se denomina *matriz de Vandermonde* asociada a los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

b) Dados los $n+1$ puntos a interpolar: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, el método de Newton consiste en encontrar los a_i que satisfacen:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i w_i(x)$$

siendo

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \prod_{0 \le j < i} (x - x_j) & \text{si } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

A partir de esta base se plantea y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll} (x_0, y_0): & a_0 = y_0 \\ (x_1, y_1): & a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ (x_2, y_2): & a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ & \vdots \\ (x_n, y_n): & a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{j=i-1} (x_i - x_j) = y_n \end{array}$$

c) Para los puntos $(0,0), (1,1), (2,2), (3,4)$ el sistema queda:

$$\begin{array}{ll} (0,0): & a_0 = 0 \\ (1,1): & a_0 + a_1(1-0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1 \\ (2,2): & a_0 + a_1(2-0) + a_2(2-0)(2-1) = 2 \Rightarrow a_2 = 0 \\ (3,4): & a_0 + a_1(3-0) + a_2(3-0)(3-1) + a_3(3-0)(3-1)(3-2) = 4 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6} \end{array}$$

d) *Ver teórico*

e) $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ Por lo tanto tenemos los siguientes datos:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	0	1
1	1/2	0
2	2/5	$-3/25$

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|}
0 & 0 & & & & & \\
 & & f'(0)=1 & & & & \\
0 & 0 & & \frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -0{,}5 & & & \\
 & & f[0,1]=1/2 & & 0 & & \\
1 & 1/2 & & \frac{0-\frac{1}{2}}{1-0} = -0{,}5 & & \frac{0{,}2-0}{2-0} = 0{,}1 & \\
 & & f'(1)=0 & & \frac{-0{,}1+0{,}5}{2-0} = 0{,}2 & & \frac{-0{,}06-0{,}1}{2-0} = -0{,}08 \\
1 & 1/2 & & \frac{-\frac{1}{10}-0}{2-1} = -0{,}1 & & \frac{0{,}08-0{,}2}{2-0} = -0{,}06 & \\
 & & f[1,2]=-1/10 & & \frac{-0{,}02+0{,}1}{2-1} = 0{,}08 & & \\
2 & 2/5 & & \frac{-\frac{3}{25}+\frac{1}{10}}{2-1} = -0{,}02 & & & \\
 & & f'(2)=-3/25 & & & & \\
2 & 2/5 & & & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto el polinomio buscado es

$$P(x) = 0+1(x-0)-0{,}5(x-0)^2+0(x-0)^2(x-1)+0{,}1(x-0)^2(x-1)^2-0{,}08(x-0)^2(x-1)^2(x-2)$$

Problema 2 (35 puntos)

a) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 en un entorno de la raíz α de f y $f'(\alpha) \neq 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la sucesión (x_n) generada por el método de Newton converge a α, con orden al menos cuadrático, para toda semilla $x_0 \in B_\varepsilon(\alpha)$.

Para calcular la tasa de convergencia, sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ de modo que la sucesión generada por el método de Newton está dada por la recurrencia $x_{n+1} = g(x_n)$ si $n \geq 0$. Un cálculo directo muestra que $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = 0$ y $g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$, por lo que el desarrollo de Taylor de segundo orden de g en torno de α resulta

$$g(x) = \alpha + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x-\alpha)^2 + R_2(x), \quad \text{donde} \quad \frac{R(x)}{(x-\alpha)^2} \to 0 \quad \text{cuando } x \to \alpha.$$

Asumiendo que $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $x_n \to \alpha$, de la expresión anterior evaluada en $x = x_n$, usando que $g(x_n) = x_{n+1}$, se obtiene

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} + \frac{R(x_n)}{(x_n-\alpha)^2} \to \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}, \quad \text{pues} \quad \frac{R(x_n)}{(x_n-\alpha)^2} \to 0.$$

Luego el orden de convergencia de (x_n) a α es al menos cuadrático, siendo cuadrático con tasa $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ cuando $f''(\alpha) \neq 0$.

b) El método de la secante es un método iterativo para hallar raíces de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se parte de dos aproximaciones iniciales x_0 y x_1 de una raíz α de f y luego se procede recursivamente como sigue. Dadas aproximaciones x_{n-1} y x_n de α, se considera la recta secante al gráfico de f por los puntos de abscisas x_{n-1} y x_n respectivamente, cuya ecuación es

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n).$$

Se toma entonces x_{n+1} como abscisa del punto de corte de la secante con el eje Ox: $y = 0$. Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

El orden del método de la secante es el número de oro: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Dada $f(x) = x^2$ y $x_0 \neq 0$ la sucesión generada por el método de Newton viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n, \quad \text{luego} \quad x_n = \frac{1}{2^n}x_0.$$

Para calcular el orden de convergencia a la raíz $\alpha = 0$ se calcula

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(x_n - \alpha), \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

Por lo tanto la convergencia es lineal, es decir, de orden 1. (Notar que esto no contradice la parte a) pues la función aquí considerada no verifia la hipótesis $f(\alpha) \neq 0$.)

d) Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene una raíz $\alpha \in \mathbb{R}^n$ que se quiere hallar, el método de Newton-Raphson propone considerar una aproximación inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de α, y a partir de ella obtener, sucesivamente, mejores aproximaciones. De forma que si x_n es la aproximación que se tiene en el paso $n \geq 0$, entonces x_{n+1} se toma como la solución del sistema lineal que se obiene al reemplazar en la ecuación $f(x) = 0$, $f(x)$ por su aproximción lineal (polinomio de Taylor de orden 1) en torno al punto x_n, a saber $f(x) \simeq f(x_n) + \mathrm{J}f(x_n)(x - x_n)$.

Para resolver el sistema lineal mencionado, $f(x_n) + \mathrm{J}f(x_n)(x - x_n) = 0$, es usual realizar el cambio de variables $\delta = x - x_n$, con lo cual x_{n+1} viene dado por

$$\begin{cases} \mathrm{J}f(x_n)\delta = -f(x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \delta. \end{cases}$$

Algunas de las condiciones de parada para el método son las siguientes.

(i) Parada por número de iteraciones. El algoritmo se detiene cuando el número de iteraciones llega a una cantidad fijada de antemano. Es adecuado cuando no se conoce el comportamiento del método para la función f considerada o también en conjunción con otras condiciones de parada que pudieran no satisfacerse a lo largo de la recursión. La condición evita que el algoritmo entre en un ciclo sin fin.

(ii) Parada por proximidad a la raíz α. Es adecuada cuando lo que se desea es hallar, con determinada precisión, la raíz α. Se busca detener el algoritmo cuando el error $\|x_n - \alpha\|$, o bien el error relativo $\frac{\|x_n - \alpha\|}{\|\alpha\|}$, es menor que cierta tolerancia $\varepsilon > 0$ fijada de antemano. Como no se conoce a priori la raíz α, se hace la estimación $\alpha \simeq x_{n+1}$ con lo que el método se detiene si

$$\|x_n - x_{n+1}\| < \varepsilon, \quad \text{o bien si} \quad \frac{\|x_n - x_{n+1}\|}{\|x_{n+1}\|} < \varepsilon.$$

(iii) Parada por proximidad a la anulación de f. Se utiliza cuando lo que se pretende es hallar valores de las variables que hagan que $f(x)$ sea pequeño. La condición de parada es $\|f(x_n)\| < \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es una tolerancia fijada de antemano.

e) Considérese la función $h(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}$, de modo que la raíz positiva $\alpha = \sqrt{2}$ de f es punto fijo de h y la recursión propuesta es $x_{n+1} = h(x_n)$, $n \geq 0$.

(i) Para $g(x) = x$, un cálculo prueba que $h(x) = \frac{2}{x}$ y $h'(x) = -\frac{2}{x^2}$. Cuando $x \in [x_0, \alpha]$, $h'(x) \in [-2, -1]$, por lo que no se verificará $|h'(x)| < 1$ en ningún intervalo cerrado que contenga a α y x_0, y en consecuencia, no se puede deducir que h sea contractiva y por ende, que (x_n) converja.

Por otro lado, si (x_n) convergiera a α, lo haría con orden 1, en virtud del teorema de orden de convergencia de un MIG, ya que $h'(\alpha) = -1$ es la primera derivada de h no nula en α.

(ii) En el caso $g(x) = 2x$, que corresponde usar el método de Newton (pues $f'(x) = 2x$), se tiene que $h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \in [-\frac{1}{2}, 0]$, si $x \in [x_0, \alpha]$. Por lo tanto, $|h'(x)| \leq 1/2 < 1$ en $[x_0, \alpha]$, de donde se deduce que h es contractiva y que (x_n) converge.

Finalmente, la convergencia es cuadrática (orden 2) ya que $h'(\alpha) = 0$ pero $h''(\alpha) = \alpha^{-1} \neq 0$.

Se elije, por lo tanto, la segunda función.

Problema 3 (30 puntos)

a) La extrapolación de Richardson consiste en dada una expresión del tipo

$$T(h) = x + a_1 h^{p_1} + O(h^{p_2})$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es un valor desconocido que se quiere hallar y $1 \leq p_1 < p_2$, volver a expresar x en funcin de otra función de h de mayor orden que $T(h)$.

Específicamente como

$$\begin{aligned} T(h) &= x + a_1 h^{p_1} + O(h^{p_2}) \\ T(qh) &= x + a_1 q^{p_1} h^{p_1} + O(h^{p_2}) \end{aligned}$$

entonces multiplicando la primera ecuación por q^{p_1} y restando miembro a miembro resulta

$$T(qh) - q^{p_1} T(h) = (1 - q^{p_1})x + O(h^{p_2})$$

Resultando la extrapolación de Richardson

$$R(h) = T(h) + \frac{T(qh) - q^{p_1} T(h)}{1 - q^{p_1}} = (1 - q^{p_1})x + O(h^{p_2})$$

b) Los errores de redondeo y truncamiento para calcular $f'(a)$ con δ_a vienen dados por

$$\begin{aligned} E_R &= \tfrac{2|f(a)|\epsilon_{maq}}{h} \\ E_T &= \tfrac{|f''(a)|}{2} h \end{aligned}$$

Luego para minimizar el error global hay que buscar un h que anule la derivada de esa suma es decir un h tal que

$$-\frac{2|f(a)|\epsilon_{maq}}{h^2} + \frac{|f''(a)|}{2} = 0$$

Para lo cual el h óptimo es $h_{opt} = \sqrt{\frac{|f''(a)}{|f(a)|}} \sqrt{\epsilon_{maq}}$.

Por ejemplo sí $f''(a) \approx O(f(a))$ entonces $h_{opt} \approx \sqrt{\epsilon_{maq}} = 10^{-8}$.

c) Utilizando la extrapolación de Richardson explicada en la parte a) resulta

$$R(h) = \frac{\delta_{a,qh} - q\delta_{a,h}}{1 - q}$$

donde $\delta_{a,h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Esto es porque haciendo el desarrollo de Taylor de orden 3, f alrededor de a resulta $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f'''(c)\frac{h^3}{6}$ (donde c está entre a y $a + h$) y luego

$$\delta_{a,h} = f'(a) + f''(a)\frac{h}{2} + f'''(c)\frac{h^3}{6}$$

En consecuencia $\delta_{a,qh} - q\delta a, h = (1 - q)f'(a) + (q^3 - q)f'''(c)\frac{h^3}{6}$ y así

$$R(h) = f'(a) + (q^3 - q)f'''(c)\frac{h^3}{6}$$