

# Examen - Métodos Numéricos

Martes 25 de febrero de 2014

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

## Problema 1 (35 puntos)

- Deducir la matriz de Vandermonde de un polinomio interpolante de grado  $n$ .
- Explicar el método de interpolación de Newton.
- Expresar el polinomio interpolante por los puntos  $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 4)\}$  utilizando el método de Newton.
- Explicar el método de Hermite que interpola en  $n$  puntos una función  $f(x)$  y su derivada  $f'(x)$  en los mismos  $n$  puntos.
- Expresar el polinomio interpolante de Hermite de la función  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  por las abscisas  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 2$ .

## Problema 2 (35 puntos)

- Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\alpha) = 0$ . Enunciar las condiciones bajo las cuales el método de Newton-Raphson es convergente con orden cuadrático a  $\alpha$ .  
Demostrar que en tal caso, la tasa de convergencia vale  $\beta = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ .
- Deducir el método de la secante, y dar su orden de convergencia.
- Calcular el orden de convergencia hacia la raíz de la función  $f(x) = x^2$  al utilizar el método de Newton-Raphson.
- Explicar el método de Newton-Raphson para funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  
Dar condiciones de parada del método.
- Se desea estimar numéricamente la raíz positiva de  $f(x) = x^2 - 2$  mediante un MIG, donde  $x_0 = 1$  y  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{g(x_k)}$ , y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se debe elegir.  
Fundamentar la elección de una de las siguientes funciones:
  - $g(x) = x$
  - $g(x) = 2x$

## Problema 3 (30 puntos)

- Explicar en qué consiste la Extrapolación de Richardson.
- Para estimar la derivada  $f'(a)$  se propone  $\delta_a(f) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ .  
Elegir un valor para  $h$  en términos del  $\epsilon$  de la máquina, que minimice la suma entre el error de redondeo y truncamiento.
- Construir un estimador con menor error de truncamiento que el anterior, utilizando la Extrapolación de Richardson.

**Fundamentar detalladamente cada respuesta.**