Solución Examen - Métodos Numéricos

Jueves 6 de febrero de 2014

Problema 1 (40 puntos)

a) Dado el sistema lineal $Ax = b$ donde la matriz A no tiene elementos nulos en su diagonal, el método de Gauss-Seidel consiste en la siguiente iteración:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \frac{1}{a_{ii}} \quad \forall i = 1 \dots n$$

Que en términos matriciales queda $x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b$ siendo D la diagonal de A, $-E$ y $-F$ las partes triangular superior e inferior de A respectivamente.

b) Sea x^* la solución del sistema $Ax = b$, que además cumple $x^* = Qx^* + r$. Si definimos el error en el paso k como $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ obtenemos

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^* = Qx^{(k)} + r - (Qx^* + r) = Qe^{(k)}$$

Luego $e^{(k)} = Q^k e^{(0)}$ y el método es convergente si y solo si $Q^k \to 0$, probemos que esto es equivalente a $\rho(Q) < 1$.

Si fuera $\rho(Q) \geq 1$ entonces existen λ, v valor y vector propio de Q respectivamente con $|\lambda| \geq 1$, como consecuencia $Q^k v = \lambda^k v$ no tiende a 0, pero eso es absurdo porque $Q^k \to 0$

Por otro lado, si suponemos $\rho(Q) < 1$ entonces, utilizando que el radio espectral es el ínfimo de todas las normas matriciales de Q, podemos afirmar que existe $||.||_\varepsilon$ tal que $||Q||_\varepsilon < 1$ (su no existencia sería una contradicción con la definición de ínfimo), luego $||Q^k||_\varepsilon \leq ||Q||_\varepsilon^k \to 0$ y eso prueba que $Q \to 0$.

c) Sea A diagonal dominante, es decir, tal que $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|$ para todo i. Sabemos que $Q_{\text{jacobi}} = D^{-1}(D - A)$. Denotemos por Q_i a la fila i-ésima de la matriz Q_{jacobi} y consideremos la norma matricial $||Q|| = \text{máx}_{i=1,\dots,n} ||Q_i||_1 = \text{máx}_{i=1,\dots,n} \sum_{i \neq j} |\frac{-a_{ij}}{a_{ii}}|$. Como A es diagonal dominante se cumple que $||Q_i||_1 < 1$ para todo i, luego $||Q|| < 1$ y por lo tanto el método de Jacobi es convergente.

d) $A = LU$ con L matriz triangular inferior y U matriz triangular superior. La matriz U se obtiene como salida del algoritmo de Escalerización Gaussiana aplicado a la matriz A, y la matriz L se obtiene a partir de las transformaciones elementales aplicadas a A durante la escalerización.

e) Al resolver los p sistemas lineales usando una única escalerización gaussiana, la cantidad de operaciones utilizadas es del orden de $O(\frac{2}{3}(n+p)^3)$ más $O(pn^2)$ por las p sustituciones hacia atrás necesarias. Por otro lado, al aplicar la descomposición LU se necesita hacer una escalerización gaussiana para obtener la descomposición ($O(\frac{2}{3}n^3)$), p sustituciones hacia atrás y p sustituciones hacia adelante ($O(2pn^2)$). Como conclusión, la eficiencia de los algoritmos depende fuertemente del valor de p, siendo más eficiente la escalerización gaussiana para valores de pequeños de p y más eficiente la descomposición LU para valores grandes de p.

Problema 2 (30 puntos)

a) “Teorema de Acotación del error por Interpolación polinómica”
Sea f de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error:

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\gamma_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Demostración. Tomemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$ para algún i, la igualdad es evidente, pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n + 2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase $\mathcal{C}^{n+1}$, resulta que F también lo es. Sean $p_0 < p_1 \ldots < p_{n+1}$ las $n + 2$ raíces de F. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n + 1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para F'. Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n + 1$ es nula. Entonces, al derivar $n + 1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma_x) - (n + 1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado. □

b) Sea f una función y p_n el polinomio interpolante de f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. El método de Lagrange considera la base de polinomios $\{l_i(x)\}_{i=0,\ldots,n}$ tal que $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$, que vale 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Una expresión para los miembros de tal base se consigue por descomposición factorial:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} \tag{1}$$

Luego, el polinomio interpolante, que sabemos que es único, admite la siguiente expresión:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \tag{2}$$

Es claro que $gr(p_n) \leq n$ y además $p_n(x_i) = f(x_i)$. Por unicidad, p_n es el polinomio interpolante.

c) Para hallar el polinomio interpolante de Lagrange de $f(x) = sen(\pi x)$ por las abscisas $x_i = \frac{i}{4}$, $i \in \{0, \ldots, 4\}$, simplemente sustituimos en la Expresión (2), y usamos que $sen(0) = sen(\pi) = 0$:

$$p_4(x) = a\frac{x(x - 1/2)(x - 3/4)(x - 1)}{1/4(1/4 - 1/2)(1/4 - 3/4)(1/4 - 1)} + \frac{x(x - 1/4)(x - 3/4)(x - 1)}{1/2(1/2 - 1/4)(1/2 - 3/4)(1/2 - 1)}$$
$$+ a\frac{x(x - 1/4)(x - 1/2)(x - 1)}{3/4(3/4 - 1/4)(3/4 - 1/2)(3/4 - 1)},$$

siendo $a = sen(\frac{\pi}{4}) = sen(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Aplicando el teorema de acotación tenemos que:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\|f^{(5)}\|_\infty}{5!} l([0,1])^5, \tag{3}$$

donde $l(I)$ es la longitud del intervalo I (en este caso $I = [0,1]$, y su longitud es 1). La derivada quinta de $f(x) = sen(\pi x)$ es $f^{(5)}(x) = \pi^5 cos(\pi x)$, por lo que $\|f^5\|_\infty = \pi^5$. Sustituyendo tenemos que $|f(x) - p_4(x)| \leq \frac{\pi^5}{5!}$, para todo $x \in [0,1]$.

e) Consideremos para cada natural n el polinomio interpolante p_n por las abscisas i/n, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Un razonamiento análogo al anterior lleva a que $|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Luego, la sucesión de polinomios $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función $f(x) = sen(\pi x)$.

Problema 3 (30 puntos)

a) Sea A una matriz de dimensión $m \times n$ con $m \geq n$, la descomposición QR de A es $A = QR$ siendo Q de dimensión $m \times m$ ortogonal y R de dimensión $m \times n$ triangular superior. La matriz Q se obtiene aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a las n columnas de A, para obtener las $(m-n)$ columnas restantes se completa la base obtenida a una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. Por otro lado la matriz R se obtiene una vez obtenida Q mediante la igualdad $R = Q^t A$.

b) El problema de mínimos cuadrados lineal consiste en minimizar $||Ax - b||^2$ siendo esta norma la euclidea usual en $\mathbb{R}^n$. Supongamos A de rango completo. Para encontrar el mínimo utilizamos la descomposición QR y las propiedades de las matrices ortogonales:

$$||Ax - b||^2 = ||QRx - b||^2 = ||Q(Rx - Q^t b)||^2 = ||(Rx - Q^t b)||^2$$

Como R es triangular superior, sus últimas $(m-n)$ filas son nulas, luego, si denotamos por $(v)_1$ y $(v)_2$ a las primeras n coordenadas y las siguientes $(m-n)$ coordenadas respectivamente de un vector $v \in \mathbb{R}^m$ y por $(R)_1$ y $(R)_2$ a la matriz formada por las primeras n filas y las siguientes $(m-n)$ filas de R tenemos que $(R)_2 = 0$ y por lo tanto

$$||(Rx - Q^t b)||^2 = ||(R)_1 x - (Q^t b)_1||^2 + ||(Q^t b)_2||^2$$

Como el segundo sumando no depende de x, hay que minimizar el primero, y como A es de rango completo, la matriz cuadrada $(R)_1$ es invertible. Luego la solución del problema de mínimos cuadrados es el vector x solución del sistema lineal de ecuaciones $(R)_1 x = (Q^t b)_1$, que puede resolverse eficientemente mediante sustitución hacia atrás.

c) Dada la matriz A de dimensión $m \times n$ la descomposición SVD es $A = U\Sigma V^t$ con U de dimensión $m \times m$ ortogonal, V de dimensión $n \times n$ ortogonal, y Σ de la forma

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r \end{pmatrix}$$

Siendo σ_i las raices cuadradas de los valores propios no nulos de $A^t A$, que existen y son reales porque $A^t A$ es semidefinida positiva.

d) Si $A = U\Sigma V^T$ es la descomposición SVD de la matriz A entonces el problema de mínimos cuadrados resulta

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} ||AX - Y|| = \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||U\Sigma V^T - Y||$$

Como U es ortogonal, entonces U^t también lo es, y por lo tanto al multiplicar por U^T se tiene que

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} ||U\Sigma V^T - Y|| = \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||U^t(U\Sigma V^T - Y)|| = \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||\Sigma V^T - U^T Y||$$

ahora si definimos $Z = V^T X = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||\Sigma V^T - U^T Y|| &= \min_{X\in\mathbb{R}^n} \left\| \frac{\Sigma_1 Z_1 - U_1^T Y}{-U_2^T Y} \right\| \\ &= \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||\Sigma_1 Z_1 - U_1^T Y|| + \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||U_2^T Y|| \end{aligned}$$

Luego el problema de mínimos cuadrados para A se minimiza si $\Sigma_1 Z_1 = U_1^T Y$ entonces $Z_1 = \Sigma_1^{-1} U_1^T Y$ y $Z = \frac{\Sigma_1^{-1} U_1^T Y}{Z_2}$, con $Z_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$ arbitrario. As los X que minimizan son

$$X = VZ = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T Y + V_2 Z_2$$

y para minimizar la norma, de modo que $V_2 Z_2 = 0$, elegimos

$$X = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T Y$$

e) Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función no lineal. El problema de mínimos cuadrados no lineal consiste en encontrar $\min_{x\in\mathbb{R}^n} ||F(x)||_2^2$. Supongamos que F es diferenciable. Dada una semilla inicial, el método de Gauss-Newton es un método iterativo que consiste en considerar la igualdad

$$F(x^{(k+1)}) = F(x^{(k)} + h^{(k)}) = F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)})h^{(k)} + o(||h^{(k)}||^2)$$

Siendo $J_F = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$ la matriz jacobiana de $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Para valores de $h^{(k)}$ pequeños esta expresión puede ser aproximada por $F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)})h^{(k)}$, al imponer que esto se anule, se obtiene la condición para hallar $h^{(k)}$ y como consecuencia el siguiente paso de la iteración

$$J_F(x^{(k)})h^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

Esto es un sistema lineal de ecuaciones que debe resolverse para hallar $h^{(k)}$, en el caso de que el sistema sea incompatible, el problema se resuelve aplicando Mínimos Cuadrados Lineal.