Solución Examen - Métodos Numéricos

Sábado 14 de diciembre de 2013

Problema 1 (40 puntos)

a) i. Vamos a probar que $x_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Razonamos por inducción completa sobre los naturales. Por hipótesis tenemos que $x_0 \in I$. Si $x_h \in I$, entonces por Taylor tenemos que $|x_{h+1}-\alpha| = |g(x_h)-g(\alpha)| = |g'(\gamma)||x_h-\alpha|$, para algún γ dentro del intervalo delimitado por x_h y α. Como tanto x_h como α pertenecen al intervalo I resulta que $\gamma \in I$, y entonces $|g'(\gamma)| < 1$. sustituyendo se tiene que $|x_{h+1} - \alpha| < |x_h - \alpha|$. Por hipótesis inductiva tenemos que $x_h \in I$, y la última desigualdad asegura entonces que $x_{h+1} \in I$.

ii. Probemos ahora que $x_n \to \alpha$. Sea $M = \sup_{x \in I} |f'(x)|$. Como I es compacto y $|f'|$ es continua, el Teorema de Weierstrass asegura que $|f'|(I)$ alcanza un máximo y un mínimo, por lo que M es máximo, y existe $x^* \in I$ tal que $M = |f'(x^*)|$. Además por hipótesis $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in I$, por lo que $M = |f'(x^*)| < 1$. Por el Teorema de Taylor tenemos que:

$$|x_{h+1} - \alpha| = |g(x_h) - g(\alpha)| = |g'(\gamma)||x_h - \alpha| \leq M|x_h - \alpha|.$$

Tenemos entonces que $|x_{h+1} - \alpha| \leq M|x_h - \alpha|$ para cada natural h. Por inducción completa se prueba que $|x_n - \alpha| \leq M^n|x_0 - \alpha|$. Tomando límite con n tendiendo a infinito tenemos que:

$$0 \leq \lim_n |x_n - \alpha| \leq \lim_n M^n|x_0 - \alpha| = 0,$$

donde en el último paso se ha utilizado que $0 \leq M < 1$ y que $|x_0 - \alpha|$ es acotado. Tenemos así que $\lim_n |x_n - \alpha| = 0$, o equivalentemente, $x_n \to \alpha$.

iii. Si ahora $\beta = g(\beta) \in I$ entonces $|\beta - \alpha| = |g(\beta) - g(\alpha)| = g'(\gamma)||\beta - \alpha|$, para algún $\gamma \in I$. Pero entonces $|g'(\gamma)| = r < 1$, y tenemos que $|\beta - \alpha|(1 - r) \leq 0$. La única posibilidad es que $\beta = \alpha$.

b) Teorema de órdenes: Sea g una función de clase $\mathcal{C}^p$ tal que $g(\alpha) = \alpha$, $g^{(i)}(\alpha) = 0$ para todo $i < p$ y $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, donde $g^{(i)}$ denota la derivada i-ésima de g. Si la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ es convergente, entonces su orden es p, y su tasa es $\beta = \frac{|g^p(\alpha)|}{p!}$.

c) Sea $g(x) = x + a(x - f(x)) + b(x^2 - f(x)^2)$. Puesto que $f(\alpha) = \alpha$, se tiene también que $g(\alpha) = \alpha$. Siguiendo el Teorema de órdenes, vamos a imponer que $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$, asegurando orden cúbico o mayor, en caso de convergencia. Si se elige x_0 cercano a α se tendrá convergencia. De hecho, por ser g' una función continua se tiene que $|g'(x)| < 1$ en algún intervalo compacto I centrado en α, y se aplica el Teorema de convergencia. El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$g'(\alpha) = 1 + (a + 2b\alpha)(1 - f'(\alpha))$$
$$g''(\alpha) = -af''(\alpha) + 2b(1 - f'(\alpha)^2 - \alpha f''(\alpha))$$

Resolviendo se consigue que:

$$a = \frac{f'(\alpha)^2 + \alpha f''(\alpha) - 1}{(f'(\alpha) - 1)^2(f'(\alpha) + 1)};$$
$$b = -\frac{f''(\alpha)}{2(f'(\alpha) - 1)^2(f'(\alpha) + 1)}.$$

d) En las condiciones anteriormente indicadas, el método M tiene orden cúbico o mayor, mientras que el de Newton-Raphson tiene orden cuadrático (para comprobarlo se debe considerar $h(x) = f(x) - x$ y observar que $h'(\alpha) \neq 0$ y $h''(\alpha) \neq 0$). Por otra parte, el método M es computacionalmente más costoso y difícil de ser llevado a la práctica, pues es necesario estimar $f'(\alpha)$ y $f''(\alpha)$, mientras que α es desconocido.

Problema 2 (30 puntos)

a) "Teorema de Acotación del error por Interpolación polinómica"
Sea f de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error:

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\gamma_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Demostración. Tomemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$ para algún i, la igualdad es evidente, pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n + 2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase $\mathcal{C}^{n+1}$, resulta que F también lo es. Sean $p_0 < p_1 \ldots < p_{n+1}$ las $n + 2$ raíces de F. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n + 1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para F'. Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n + 1$ es nula. Entonces, al derivar $n + 1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma_x) - (n + 1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado. $\square$

b) Sea f una función y p_n el polinomio interpolante de f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. El método de Lagrange considera la base de polinomios $\{l_i(x)\}_{i=0,\ldots,n}$ tal que $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$, que vale 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Una expresión para los miembros de tal base se consigue por descomposición factorial:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} \tag{1}$$

Luego, el polinomio interpolante, que sabemos que es único, admite la siguiente expresión:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \tag{2}$$

Es claro que $gr(p_n) \leq n$ y además $p_n(x_i) = f(x_i)$. Por unicidad, p_n es el polinomio interpolante.

c) Para hallar el polinomio interpolante de Lagrange de $f(x) = sen(\pi x)$ por las abscisas $x_i = \frac{i}{4}$, $i \in \{0, \ldots, 4\}$, simplemente sustituimos en la Expresión (2), y usamos que $sen(0) = sen(\pi) = 0$:

$$p_4(x) = a\frac{x(x-1/2)(x-3/4)(x-1)}{1/4(1/4-1/2)(1/4-3/4)(1/4-1)} + \frac{x(x-1/4)(x-3/4)(x-1)}{1/2(1/2-1/4)(1/2-3/4)(1/2-1)}$$
$$+ a\frac{x(x-1/4)(x-1/2)(x-1)}{3/4(3/4-1/4)(3/4-1/2)(3/4-1)},$$

siendo $a = sen(\frac{\pi}{4}) = sen(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Aplicando el teorema de acotación tenemos que:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\|f^{(5)}\|_\infty}{5!} l([0,1])^5, \tag{3}$$

donde $l(I)$ es la longitud del intervalo I (en este caso $I = [0,1]$, y su longitud es 1). La derivada quinta de $f(x) = sen(\pi x)$ es $f^{(5)}(x) = \pi^5 cos(\pi x)$, por lo que $\|f^5\|_\infty = \pi^5$. Sustituyendo tenemos que $|f(x) - p_4(x)| \leq \frac{\pi^5}{5!}$, para todo $x \in [0,1]$.

e) Consideremos para cada natural n el polinomio interpolante p_n por las abscisas i/n, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Un razonamiento análogo al anterior lleva a que $|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Luego, la sucesión de polinomios $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función $f(x) = sen(\pi x)$.

Problema 3 - Ecuaciones diferenciales (30 puntos)

a) Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el Problema de Valores Iniciales consiste en hallar la función $y = y(x)$ tal que:

$$(PVI)\colon \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) El método de Euler hacia adelante consiste en la siguiente iteración $y_{n+1}^E = y_n^E + hf(x_n, y_n^E)$, donde en el caso de pasos resulares se toma $x_n = x_0 + nh$ con $h > 0$ fijo, y el paso inicial vale $y_0^E = y_0$. El método del Trapecio toma el mismo paso inicial $y_0^T = y_0$ y se define mediante la iteración de un solo paso: $y_{n+1}^T = y_n^T + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n^T) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^T))$, siendo $x_n = x_0 + nh$, $x_{n+1} = x_n + h$ en el caso de paso $h > 0$ fijo.

c) El Problema Test es el PVI dado por $f(x,y) = qy$ y $y_0 = 1$, donde $q \in \mathbb{C}$. La región de estabilidad de un método iterativo es el conjunto de elementos qh tales que la sucesión $\{y_n\}$ resulta acotada al ser aplicada al Problema Test.

En el caso de Euler hacia adelante se tiene que $y_{n+1} = y_n + h(qy_n) = (1+hq)y_n$ con $y_0 = 1$, por lo que $y_n = (1+hq)^n$. Luego, la región de estabilidad es el conjunto $R^E = \{hq \in \mathbb{C} : |1+hq| < 1\}$, es decir, un disco de radio unidad centrado en el complejo -1.

En el caso del Trapecio se tiene que $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(qy_n + qy_{n+1})$, por lo que $(1 - qh/2)y_{n+1} = (1 + qh/2)y_n$, y por inducción (usando que $y_0 = 1$) tenemos que $y_n = \left(\frac{1+qh/2}{1-qh/2}\right)^n$. La acotación requiere que la base debe ser en magnitud igual a 1 o menor, por lo que debe cumplirse que $|1 + qh/2| \leq |1 - qh/2|$. El conjunto de complejos hq que verifican tal condición cumplen que la distancia al complejo -1 debe ser menor o igual que la distancia al complejo 1. Esto ocurre precisamente cuando qh se halla en el semiplano con parte real negativa, o el eje imaginario: $R^T = \{hq \in \mathbb{C} : Re\{hq\} \leq 0\}$.

d) Sea $a(h)$ una aproximación numérica para el número real a que satisface la siguiente expresión:

$$a(h) = a + c_{p_1}h^{p_1} + c_{p_2}h^{p_2} + \dots, \tag{4}$$

donde $p_1 < p_2$. Esto implica que $c_{p_1}h^{p_1}$ es el término dominante del error. La extrapolación de Richardson consiste en considerar el estimador $a(h/q)$ para cierto $q > 1$ y recombinar los estimadores $a(h)$ y $a(h/q)$ para anular el error dominante, de modo que el orden del nuevo error sea p_2 o mayor.

Tomemos $q = 2$ y apliquemos la extrapolación de Richardson tanto para Euler como para el método del Trapecio. Denotemos $y^E(h)$ al estimador de $y(x_n)$ correspondiente a aplicar el método de Euler hacia adelante con paso h. Como el error de truncamiento del método de Euler es 2, tenemos que el orden del error global es 1, y

$$\begin{aligned} y^E(h) &= y(x_n) + c_1h + c_2h^2 \\ y^E(h/2) &= y(x_n) + c_1h/2 + c_2/4h^2. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $y^*(h) = 2y^E(h/2) - y^E(h)$ es un estimador para $y(x_n)$ con error global de orden 2 o mayor.

Para el método del Trapecio tenemos orden de consistencia 2. Entonces:

$$\begin{aligned} y^T(h) &= y(x_n) + c_1h^2 + c_2h^3 \\ y^T(h/2) &= y(x_n) + c_1/4h/2 + c_2/8h^3. \end{aligned}$$

Luego, el estimador $y^{**}(h) = \frac{4y^T(h/2) - y^T(h)}{3}$ tiene error de orden 3 o mayor.