Solución Examen - Métodos Numéricos

Jueves 1 de agosto de 2013

Problema 1 (35 puntos)

a) Sea α tal que $\alpha = f(\alpha)$ y $g(x) = x + a(x - f(x))$. El método M es precisamente un MIG, con $x_{n+1} = g(x_n)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Por el teorema de órdenes, se debe anular la derivada en α, hecho que se consigue cuando $g'(\alpha) = 1 + a(1 - f'(\alpha)) = 0$, es decir, tomando $a = \frac{1}{f'(\alpha)-1}$.

b) Por el Teorema del punto fijo, la convergencia está asegurada cuando $|g'(x)| < 1$, o equivalentemente, si $\frac{|x^2-2|}{2x^2} < 1$. La inecuación se verifica en el intervalo $I = (\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty)$, que contiene a $x_0 = 1$.

c) Por Taylor: $e_{n+1} = |g(x_n) - g(\sqrt{2})| = |\frac{g''(x_n)}{2}(\sqrt{2})(x - \sqrt{2})^2| = |\frac{g''(x_n)}{2}|e_n^2$.
Puesto que $x_n \in [1, 2]$ y además allí se tiene que $|g''(x)| = |\frac{2}{x^3}| \leq 2$, entonces $e_{n+1} \leq e_n^2$.

d) Por inducción se tiene que $e_n \leq e_0^{2n} = (1 - \sqrt{2})^{2n} < 10^{-5}$. Tomando logaritmo natural tenemos que $n > \frac{\ln(10^{-5})}{2\ln(\sqrt{2}-1)}$. El primer natural que verifica tal condición es $n = 7$. Por lo tanto, con tan solo 7 iteraciones es posible asegurar que el error cometido para aproximar $\alpha = \sqrt{2}$ es menor que 10^{-5}.

Problema 2 (35 puntos)

a) $p_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{8}$.

b) $p_2(x) = p_1(x) + a(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$, y usando $p_2(4) = 4$, $a = 1/120$.

c) Sea p el polinomio interpolante de $f \in C^{n+1}$ por los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Entonces, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\theta_x \in [x_0, x_n]$ tal que:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\theta_x)}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

d) En el intervalo $[-1, 3]$ el polinomio p_1 es interpolante de p_2 por $\{(-1, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 1)\}$. Luego, tomando $f(x) = p_2(x)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} E(x) = |p_2(x) - p_1(x)| &\leq \frac{p_2^{(4)}}{4!}|(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)| \\ &= a|(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)| < \frac{1}{120}4^4 = \frac{256}{120}. \end{aligned}$$

Problema 3 (30 puntos)

a,b,c) Ver teórico.

d) Tenemos el problema test definido por el complejo $q = -1 - i$. La región de estabilidad del método de Heun es $R_H = \{z = hq \in \mathbb{C} : |1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1\}$. Luego, h debe cumplir $|1-(1+i)h+ih^2| \leq 1$ y simultáneamente $sh = 5$ para algún entero positivo s. Resolviendo se consigue $h_{max} = \frac{5}{4}$, y otros pasos más pequeños que dividen a 5 son estables.
La aplicación del método de Heun lleva a $y_n = (1 + (-1 - i) + \frac{(-1-i)^2}{2})^n y_0 = 0$.

Para Euler hacia adelante, la región es $R_E = \{z = hq \in \mathbb{C} : |1 + z| \leq 1\}$. Resolviendo se tiene que $0 \leq h \leq 1$, y $h_{max} = 1$. La aplicación de Euler con $h = 1$ lleva a que $y_n = (1 + q)^n y_0 = (-i)^n$. Luego $y_5 = (-i)^5 = -i$.

La solución exacta es $y(t) = e^{qt} = e^{(-1-i)t}$, por lo que $|y(5)| = e^{-5}$, y el método de Heun es más cercano, aunque errático debido a su grueso paso y trabajo en el umbral de la estabilidad numérica.