Examen - Métodos Numéricos

Jueves 1 de agosto de 2013

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

Se desea resolver la ecuación $x = f(x)$ con f de clase C^2, utilizando el método M:

$$(M)\colon \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{k+1} = x_k + a(x_k - f(x_k)) \end{cases}$$

1) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para maximizar el orden de convergencia del método M.
   Asumir que existe solución $\alpha = f(\alpha)$ y además verifica $f'(\alpha) \neq 1$.
   En las partes siguientes se utilizará el método M con el valor de a antes hallado.
2) Sea $f(x) = \frac{2}{x}$. Hallar el mayor intervalo I tal que $\sqrt{2} \in I$ y el método converge siempre que x_0 pertenezca al intervalo I.
3) Sea $x_0 = 1$ y $e_k = |x_k - \sqrt{2}|$ el error en el paso k. Hallar c tal que $e_{k+1} \leq c e_k^2$.
   Sugerencia: Utilizar que $x_n \in [1,2]$ para todo n, y que $\frac{2}{x^3} < 2$ si $1 \leq x \leq 2$.
4) Utilizando la parte anterior, determinar una cantidad suficiente de iteraciones para asegurar un error menor que 10^{-5}.

Problema 2 (35 puntos)

1) Hallar el polinomio interpolante p_1 por los puntos $(-1,0),(1,0),(2,0),(3,1)$, utilizando el método de Lagrange.
2) Utilizando el método de Newton, hallar el polinomio interpolante p_2 por los puntos anteriores y $(4,4)$.
3) Enunciar el Teorema de Acotación del error de interpolación polinómica.
4) Acotar la distancia máxima entre p_1 y p_2 en el intervalo $[-1,3]$.

Problema 3 (30 puntos)

1) Defina los métodos de Euler hacia adelante y Heun para la resolución de un problema de valores iniciales.
2) Defina el problema test y la región de estabilidad de un método iterativo.
3) Hallar la región de estabilidad de los dos métodos anteriores.
4) Se desea estimar $y(5)$ en el siguiente problema de valores iniciales ($i^2 = -1$):

$$\begin{cases} y'(t) = -(1+i)y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   Estimar $y(5)$ aplicando los métodos anteriores con paso $h = 1$. Contrastar sus errores y hallar el conjunto de pasos h que aseguran estabilidad numérica, para ambos métodos.