Examen - Métodos Numéricos

Miércoles 27 de Febrero de 2013

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

a) Definir el Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL).
b) Definir la descomposición QR y utilizarla para la resolución del PMCL.
c) Definir la descomposición SVD y utilizarla para la resolución del PMCL.
d) Definir el Problema de Mínimos Cuadrados no Lineal (PMCNL), y describir en detalle el método de Gauss Newton.

Problema 2 (35 puntos)

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar no lineal.

a) Definir los Método Iterativos Generales (MIG) para el problema de ecuaciones no lineales escalares. Definir orden y velocidad de convergencia.
b) Explicar el Método de la Secante. ¿Este método puede verse como un caso particular de MIG? Justifique.
c) Sea e_n el error cometido por el Método de la Secante en el paso n. Hallar el orden de convergencia p del método, sabiendo que se cumple la relación $|e_{n+1}| \simeq \beta^p |e_n||e_{n-1}|$, siendo β la velocidad de convergencia.
d) Comparar el orden antes obtenido con el del método de Newton-Raphson. ¿El método de la Secante podría ser preferible? Justifique.
e) Aplicar 3 iteraciones del método de la secante partiendo de $x_0 = 0, x_1 = 1$ a la ecuación a la función $f(x) = e^{-x} - 3/4$. Hallar el error cometido.

Problema 3 (30 puntos)

Se considera la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = te^t$ con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 0$. Se desea comparar el desempeño de los métodos de Euler y Trapecio para estimar $y(1)$.

a) Mostrar que la solución exacta es de la forma $y(t) = Kt^3e^t$. Hallar K.
b) Armar un Problema de Valores Iniciales, usando el cambio de variable $u = y'$.
c) Calcular y_2^E, el estimador por Euler hacia adelante con $h = 1/2$.
d) Calcular y_2^T, el estimador por el método del Trapecio con $h = 1/2$.
e) Calcular los errores relativos cometidos. ¿Son pequeños? Justificar.

Solución Examen - Métodos Numéricos

Miércoles 27 de Febrero de 2013

Problema 1

a,b,c,d) Ver teórico.

Problema 2

a) Ver teórico.

b) Ver teórico. El método de la Secante es un método multipunto (requiere x_n y $x_(n-1))$ por lo que no es un caso particular de los MIGs.

c) Hay varias formas de deducir el orden de convergencia, por ejemplo combinando las ecuaciones: $|e_{n+1}| \simeq \beta^p |e_n||e_{n-1}|$, $|e_{n+1}| \simeq \beta |e_n|^p$ (por definiciión de p y β), y $|e_n| \simeq \beta |e_{n-1}|^p$ (por definiciión de p y β). Obtenemos $\beta |e_n|^p \simeq \beta^{1+1/p} |e_n|^p$ y por tanto $p = 1 + 1/p$, hallando las raíces se obtiene $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

El método de Newton-Raphson es de orden cuadrático. A pesar de que el método de la Secante es de menor orden que el método de Newton-Raphson, igual puede ser preferible cuando el cálculo de la derivada f' es muy costoso.

d) La ecuación en diferencias es:

$$x_{i+1} = x_i - (e^{-x_i} - 3/4)\frac{x_i - x_{i-1}}{e^{-x_i} - e^{-x_{i-1}}}.$$

Partiendo de $x_0 = 0, x_1 = 1$ obtenemos en 3 iteraciones: $x_2 = 0.3954942, x_3 = 0.243802, x_4 = 0.2900717$, por tanto el valor estimado de la raíz es 0.2900717.

Despejando se sabe que la raíz vale $\alpha = 0.2876821$, por lo que en tres iteraciones se comete un error de $|0.2876821 - 0.2900717| = 0.0023896$.

Problema 3

a) Por sustitución directa se consigue $K = 1/6$.

b) $(y, u)' = (u, 2u - y + te^t)$, con $(y(0), u(0)) = (0, 0)$.

c) $(y_{n+1}, u_{n+1}) = (y_n, u_n) + h(u_n, 2u_n - y_n + nhe^{nh})$. Usando $h = 1/2$ resulta $(y_1, u_1) = (0, 0)$, mientras que $(y_2, u_2) = (0, e^{1/2}/2)$, por lo que $y_2^E = 0$.

d) Se debe resolver un sistema lineal de 2×2 para cada paso:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(u_n + u_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(2u_n - y_n + nhe^{nh} + 2u_{n+1} - y_{n+1} + (n+1)he^{(n+1)h})$$

La resolución lleva a que $y_1 = 4u_1 = \frac{2\sqrt{e}}{9}$, e $y_2^T = \frac{17\sqrt{e}+2e}{18}$.

e) Se comprueba rápidamente que los errores relativos son inaceptables.
Se observa que el método de Euler no mejora al reducir h.
Ambos métodos numéricos son inestables: la propia ecuación diferencial lo es.