Examen - Métodos Numéricos

Febrero de 2013

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (35 puntos)

Sea $Ax = b$ un sistema lineal compatible determinado, con solución α.

a) Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente para que el método iterativo $x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + r$ converja a α.

b) Describir el método de Gauss-Seidel, obteniendo Q_{G-S} y r_{G-S}.

c) Considérese el sistema lineal $Ax = b$ caracterizado por $b = (0, 1)^t$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Calcular la norma infinito de la correspondiente matriz Q de Gauss-Seidel.

d) Determine la convergencia del método de Gauss-Seidel para el sistema lineal anterior. Justificar.

Problema 2 (35 puntos)

a) Probar que si g es derivable con punto fijo $\alpha \in I$ tal que $|g'(x)| < 1$ en el intervalo cerrado I, entonces la sucesón $x_{n+1} = g(x_n)$ con dato inicial $x_0 \in I$ está contenida en I y converge a α, que es el único punto fijo dentro de I.

b) Probar que el método de Newton-Raphson tiene orden de convergencia 2 o superior, bajo condiciones que se deben enunciar. Hallar su tasa de convergencia.

c) Se desea estimar la raíz α de la función $f(x) = e^{-|x|} + x$.
Mostrar que tal raíz existe y es única.

d) Expresar el método de Newton Raphson correspondiente, con $x_0 = -1$.

e) Justifique la elección de uno de los tres métodos siguientes para estimar la raíz α, teniendo presente que en todos los casos se parte de $x_0 = -1$:
   1) Método de Newton-Raphson.
   2) Método de Bipartición en el intervalo $[-1, 0]$.
   3) $x_{n+1} = -e^{-|x_n|}$.

Ejercicio 3 (30 puntos)

Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Se desea estimar la integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ mediante únicamente dos evaluaciones de f dentro del intervalo $[-1, 1]$. Consideremos el estimador $I' = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$, donde $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ y $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

a) Construir un sistema de ecuaciones no lineal con incógnitas $\{x_1, x_2, w_1, w_2\}$, imponiendo que $I'(f) = I(f)$ para las cuatro funciones 1, x, x^2 y x^3.

b) Aplicar un solo paso del método de Newton-Raphson para resolver el sistema no lineal anterior, partiendo de $(x_1, x_2, w_1, w_2) = (-1, 1, 1, 1)$.

c) Resuelva exactamente el sistema no lineal. El método de integración obtenido se denomina Cuadratura de Gauss de 2 puntos.

d) Contrastar la Cuadratura de Gauss de dos puntos con el Método del Trapecio, para integrar el polinomio $p(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución Examen - Métodos Numéricos

Febrero de 2013

Ejercicio 1 (35 puntos)

a) Ver teórico.
b) $Q_{G-S} = -(L+D)^{-1}U$ y $r_{G-S} = (L+D)^{-1}b$,
siendo $A = L+D+U$ descomposición en matrices inferior, diagonal y superior.
c) Calculando la matriz Q_{G-S} para el caso particular tenemos que:

$$Q_{G-S} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La norma infinito es el máximo de las normas 1 de sus filas: $\|Q_{G-S}\|_\infty = 5$.
d) Dado que $\rho(Q_{G-S}) = 1/2$, el método de Gauss Seidel es convergente.

Ejercicio 2 (35 puntos)

a) Ver teórico.
b) Ver teórico.
c) La función f es continua en $\mathbb{R}$, $f(0) = 1 > 0$ y $f(-1) < 0$, por lo que existe $\alpha \in (-1, 0) : f(\alpha) = 0$. Además f es monótona en $\mathbb{R}^-$ y positiva en $\mathbb{R}^+$, por lo que α es única raíz de f.
c)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e^{-|x_n|}(1+|x_n|)}{sg(x_n)e^{-|x_n|} - 1}.$$

Se observa que partiendo de $x_0 = -1$, la sucesión de Newton-Raphson verifica $x_n < 0$, por lo que se puede usar que $|x| = -x$ cuando $x < 0$.
d) La función f es monótona creciente en $\mathbb{R}^-$, por lo que allí nunca se anula su derivada. Como consecuencia, el método de Newton-Raphson tiene orden de convergencia cuadrático o superior (el caso es de orden 2). El método de Bipartición converge linealmente, por lo que no se prefiere. Para analizar el método iterativo (3), observemos que $g(x) = -e^{-|x|}$ tiene a α como punto fijo, y lleva $\mathbb{R}^-$ a negativos. Sin pérdida de generalidad, consideremos $g(x) = -e^x$ con dominio en $\mathbb{R}^-$, que es derivable allí. Además $g'(\alpha) = -e^\alpha \neq 0$. Luego, admite convergencia lineal en alún entorno de α, y el método (2) de Newton Raphson es preferible.

Ejercicio 3 (30 puntos)

a) Calculando las integrales de los monomios x^i, obtenemos un sistema no lineal:

$$w_1 + w_2 = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$w_1x_1 + w_2x_2 = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = 2/3$$

$$w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0.$$

b) Se desea hallar el nulo del campo vectorial siguiente:

$$F(x_1, x_2, w_1, w-2) = (w_1 + w_2 - 2, w_1x_1 + w_2x_2, w_1x_1^2 + w - 2x_2^2 - 2/3, w_1x_1^3 + w_2x_2^3).$$

Ordenamos sus derivadas parciales en la siguiente matriz jacobiana:

$$J_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & x_1 & x_2 \\ 2w_1x_1 & 2w_2x_2 & x_1^2 & x_2^2 \\ 3w_1x_1^2 & 3w_2x_2^2 & x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix}.$$

En la aplicación del método de Newton-Raphson, se procede evaluando el jacobiano en el dato inicial $(-1, 1, 1, 1)$ y resolviendo el sistema lineal:

$$J_F(x^1 - x^0) = -F(x^0).$$

Al resolver este sistema lineal se consigue $x^1 = (1, 1, -2/3, 2/3)$.

c) Multiplicando la segunda ecuación por x_1^2 y restando a la cuarta se deduce que $x_1 = -x_2$. A partir de la segunda ecuación se obtiene que $w_1 = w_2$, y evaluando en la primera necesariamente $w_1 = w_2 = 1$.

Finalmente, por la tercera ecuación tenemos que $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

La solución es entonces $(x_1, x_2, w_1, w-2) = (-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 1, 1)$.

El método de Newton-Raphson ha aproximado en su primer paso a la solución.

d) Sea $f(x) = 1 + x^2$. La integral exacta es $I = \int_{-1}^{1}(1 + x^2)dx = 2 + 2/3 = 8/3$. El método del trapecio estimaría con $I_T = 2 \times \frac{f(-1)+f(1)}{2} = 4$, con un error de $4/3$. Por otra parte, el estimador de Gauss de dos puntos es $I' = f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = 8/3$, consiguiendo el resultado exacto.