Examen - Métodos Numéricos

Febrero de 2013

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (35 puntos)

Sea $Ax = b$ un sistema lineal compatible determinado, con solución α.

a) Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente para que el método iterativo $x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + r$ converja a α.

b) Describir el método de Gauss-Seidel, obteniendo Q_{G-S} y r_{G-S}.

c) Considérese el sistema lineal $Ax = b$ caracterizado por $b = (0, 1)^t$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Calcular la norma infinito de la correspondiente matriz Q de Gauss-Seidel.

d) Determine la convergencia del método de Gauss-Seidel para el sistema lineal anterior. Justificar.

Problema 2 (35 puntos)

a) Probar que si g es derivable con punto fijo $\alpha \in I$ tal que $|g'(x)| < 1$ en el intervalo cerrado I, entonces la sucesón $x_{n+1} = g(x_n)$ con dato inicial $x_0 \in I$ está contenida en I y converge a α, que es el único punto fijo dentro de I.

b) Probar que el método de Newton-Raphson tiene orden de convergencia 2 o superior, bajo condiciones que se deben enunciar. Hallar su tasa de convergencia.

c) Se desea estimar la raíz α de la función $f(x) = e^{-|x|} + x$.
Mostrar que tal raíz existe y es única.

d) Expresar el método de Newton Raphson correspondiente, con $x_0 = -1$.

e) Justifique la elección de uno de los tres métodos siguientes para estimar la raíz α, teniendo presente que en todos los casos se parte de $x_0 = -1$:
   1) Método de Newton-Raphson.
   2) Método de Bipartición en el intervalo $[-1, 0]$.
   3) $x_{n+1} = -e^{-|x_n|}$.

Ejercicio 3 (30 puntos)

Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Se desea estimar la integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ mediante únicamente dos evaluaciones de f dentro del intervalo $[-1, 1]$. Consideremos el estimador $I' = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$, donde $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ y $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

a) Construir un sistema de ecuaciones no lineal con incógnitas $\{x_1, x_2, w_1, w_2\}$, imponiendo que $I'(f) = I(f)$ para las cuatro funciones 1, x, x^2 y x^3.

b) Aplicar un solo paso del método de Newton-Raphson para resolver el sistema no lineal anterior, partiendo de $(x_1, x_2, w_1, w_2) = (-1, 1, 1, 1)$.

c) Resuelva exactamente el sistema no lineal. El método de integración obtenido se denomina Cuadratura de Gauss de 2 puntos.

d) Contrastar la Cuadratura de Gauss de dos puntos con el Método del Trapecio, para integrar el polinomio $p(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$.