Solución - Examen Métodos Numéricos 12/12/2012

Ejercicio 1

a,b) Ver teórico.

c) El método de Newton-Raphson requiere derivabilidad y a su vez evaluar la derivada, a diferencia de los métodos de bipartición y la secante. No obstante, si $f'(\alpha) \neq 0$ tiene orden cuadrático o superior, cada vez que sea convergente (si cae por ejemplo en las condiciones del Teorema del Punto Fijo). El método de la secante no requiere evaluar la derivada de f, pero su orden es aureo cuando converge, por lo tanto inferior que el de Newton-Raphson. El de bipartición requiere continuidad y delimitación de la raíz en un intervalo compacto con signos opuestos en sus extremos, pero el éxito de convergencia está garantizado, con un orden lineal.

Ejercicio 2

a) el polinomio de Lagrange es $p_m(x) = -l_{1/2}(x) + \sum_{i=1}^{m} l_i(x)$, donde:

$$l_{1/2}(x) = \frac{\prod_{j=1}^{m}(x-j)}{\prod_{i=1}^{m}(1/2-j)};$$
$$l_i(x) = \frac{(x-1/2)\prod_{j=1,j\neq i}^{m}(x-j)}{(i-1/2)\prod_{j=1,j\neq i}^{m}(i-j)}$$

b) El polinomio auxiliar $q_m(x) = p_m(x) - 1$ tiene m raíces, y además $q(1/2) = -2$. Luego $q_m(x) = c_m \prod_{i=1}^{m}(x-i)$. Su coeficiente principal vale $c_m = -2/\prod_{i=1}^{m}(1/2-i) \neq 0$, y es el mismo que el de p_m, por lo que $gr(q_m) = gr(p_m) = m$.

c) La función $f(x) = cos(2\pi x)$ verifica $f(1/2) = cos(\pi) = -1$, mientras que $f(i) = 1$ para cualquier entero i. A partir de la definición de polinomio interpolante se consigue que p_m es polinomio interpolante de f en el conjunto de abscisas $\{1/2, 1, \ldots, m\}$. Nótese que es interpolante de menor grado posible por ser de Lagrange.

d) Ver teórico.

e) Por el Teorema de acotación del error en interpolación polinómica, tenemos que para cualquier $x \in [1/2, m]$ existe $w_x \in [1/2, m]$ tal que:

$$f(x) - p_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(w_x)}{(m+1)!}(x-1/2)\prod_{j=1}^{m}(x-j).$$

Además $|f^{(m+1)}(x)| \leq (2\pi)^{m+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Asimismo, toda resta de números dentro del intervalo $[1/2, m]$ siempre será menor o igual que su longitud. Entonces una cota posible en todo $[1/2, m]$ es:

$$|f(x) - p_m(x)| \leq \frac{(2\pi)^{m+1}(m-1/2)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Ejercicio 3

a) Sea $w = \dot{\varphi}$ e $y = (\varphi, w)$. Entonces $\dot{y} = (w, -sen(\varphi))$, que junto con el dato inicial $y(0) = (0, \pi/4)$ define un problema de valores iniciales.

b) Utilizando el método de Euler hacia adelante con $h = 1/2$ tenemos que:

$$y_1 = (0, \pi/4) + 1/2(\pi/4, -sen(0)) = (\pi/8, \pi/4)$$
$$y_2 = (\pi/8, \pi/4) + 1/2(\pi/4, -sen(\pi/8) = (\pi/4, \pi/4 - sen(\pi/8))$$

El estimador para $\varphi(1)$ es la primera coordenada de y_2, que vale $\varphi_2 = \pi/4$ radianes.

c) Análogamente con paso $h = 1/4$ se consigue $\varphi_4 = 0,737$ radianes.

d) Ver teórico.

e) La extrapolación de Richardson brinda el estimador $\varphi^* = 2\varphi_4 - \varphi_2 = 0,6886$ radianes.