Examen - Métodos Numéricos

Mircoles 12 de Diciembre de 2012

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (30 puntos)

Se considera un método iterativo general $x_{n+1} = g(x_n)$ donde $g : I \to \mathbb{R}$ es derivable, $g(\alpha) = \alpha$ y $|g'(x)| < 1$ en todo elemento x dentro del intervalo I que contiene a α. Sea $x_0 \in I$.

a) Probar que $\{x_n\} \subset I$, $\{x_n\}$ converge a α y además α es el único punto fijo de g.
b) Definir los métodos de Newton-Raphson, secante y bipartición para hallar la raíz de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
c) Comparar los métodos anteriores, considerando convergencia y cantidad de evaluaciones de f y f'.

Problema 2 (35 puntos)

Para cada entero positivo m se considera el polinomio de menor grado posible p_m tal que $p_m(1/2) = -1$ y $p_m(i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

a) Expresar p_m utilizando los polinomios de Lagrange.
b) Probar que $gr(p_m) = m$, $\forall m \geq 1$.
c) Mostrar que el polinomio interpolante de la función $f(x) = cos(2\pi x)$ por las abscisas $\{1/2, 1, \ldots, m\}$ es exactamente p_m.
d) Enunciar el teorema de acotación del error en interpolación polinómica.
e) Para cada entero positivo m, acotar el error cometido por aproximar $f(x)$ por $p_m(x)$ en el intervalo $[1/2, m]$.

Ejercicio 3 (35 puntos)

Se desea estudiar la posición angular de un péndulo plano al cabo de un segundo. Se sabe que en $t = 0$ el mismo se halla abajo, en posición vertical: $\varphi(0) = 0$, y con velocidad angular inicial de $\varphi'(0) = \pi/4$ rad/s. A partir de la Ley de Newton se obtiene la evolución del péndulo mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\varphi'' + \frac{g}{r}\sin(\varphi) = 0,$$

donde asumiremos que $g/r = 1$ en unidades compatibles.

a) Formular el problema como un Problema de Valores Iniciales.
b) Estimar $\varphi(1)$ mediante Euler hacia adelante, con paso $h = 1/2$.
c) Repetir la parte anterior, con paso $h = 1/4$.
d) Enunciar la Extrapolación de Richardson.
e) Utilizando la Extrapolación de Richardson, obtener un tercer estimador para $\varphi(1)$ con menor error de truncamiento. Justificar.