Examen - Métodos Numéricos

26 de julio de 2012

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (30 puntos)

a) Enunciar el Teorema del Punto Fijo para funciones de una variable real.
b) Para cada natural n se considera el polinomio $f_n(x) = x^{2n} - x - 1$. Se desea determinar para cada polinomio f_n su raíz negativa más próxima a $x = 0$.
Demostrar que para cada natural n, existe y es único $\alpha_n \in [-1, 0]$ tal que $f_n(\alpha_n) = 0$.
Sugerencia: aplicar *Bolzano* y estudiar el crecimiento de f_n.
c) Hallar α_0 y α_1. Demostrar que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ es monótona decreciente estrictamente y converge a -1.
d) Se considera el Método Iterativo General de orden 1 dado por

$$x_{k+1} = -(1 + x_k)^{\frac{1}{2n}}, n \geq 1.$$

Determinar si este método converge a α_n tomando un punto inicial suficientemente próximo.
e) Proponga un método iterativo alternativo, que asegure mayor orden de convergencia en algún entorno de α_n. Justificar.

Problema 2 (40 puntos)

a) Sea $M \in \mathcal{M}^{n\times n}$ una matriz real tal que $\rho(M) < 1$, entonces $(M)^n \xrightarrow{n} 0$.
Sugerencia: Puede asumir que M es diagonalizable
b) Sea $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ una matriz real invertible y sea la matriz $X^k \in \mathcal{M}^{n\times n}$ una matriz real, se define el siguiente método iterativo:

$$\begin{cases} X^{k+1} = X^k + X^k(\mathrm{Id} - A\,X^k) \\ X^0 \end{cases}$$

Probar que, si $\rho(\mathrm{Id} - AX^0) < 1$ entonces $X^k \xrightarrow{k} A^{-1}$.
Sugerencia Calcule $(\mathrm{Id} - AX^{k+1})$ y expreselo como función de X^k.
c) Usando la parte anterior, probar que el método converge al menos con orden cuadrático.
d) Dada las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X^0 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- Usando el resultado de la parte b), decida si la sucesión converge.
- Halle las iteraciones X^1, X^2 y X^3.

Problema 3 (30 puntos)

Dado el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = x^2 y - 1.2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Hallar la solución exacta $y_A(x)$.
b) Obtener soluciones aproximadas en el intervalo $[0, 1]$ aplicando el método de Euler con paso $h = 0.25$ y $h = 0.5$.
c) Calcular error absoluto y relativo de los valores $y_{0.5}(1)$ y $y_{0.25}(1)$. Calcule el cociente entre errores absolutos y ver si el resultado es coherente con el orden global del método.

Solución Examen - Métodos Numéricos

26 de enero de 2012

Ejercicio 1 (30 puntos)

a) Ver teórico.

b) Puesto que $f_n(-1)f_n(0) < 0$ y cada f_n es continua, el Teorema de Bolzano asegura que existe alguna raíz $\alpha_n \in [-1, 0]$, para cada polinomio f_n. Además $f_n'(x) = 2nx^{2n-1} - 1$ es siempre negativa en todo $[-1, 0]$, por lo que f_n es monótona decreciente estrictamente en $[-1, 0]$, y α_n es la única raíz de f_n en tal intervalo.

c) Despejando se obtiene directamente que $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ Además:

$$f_{n+1}(\alpha_n) = (\alpha_n)^{2n+2} - \alpha_n - 1 = (\alpha_n)^2(1 + \alpha_n) - (1 + \alpha_n) = (1 + \alpha_n)(\alpha_n^2 - 1) < 0.$$

Dado que $f_{n+1}(-1) > 0$, por Bolzano: $\alpha_{n+1} \in [-1, \alpha_n]$, y $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ es esctrictamente decreciente. En el intervalo $(-1, 0]$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -x-1$, y por continuidad las raíces convergen a -1.

d) El punto fijo de la función g coincide con α_n, por lo que si el método iterativo converge lo hará a α_n. Para estudiar si existe convergencia en algún entorno de α_n, basta con determinar si $|g'(\alpha_n)|$ se escapa o no de la unidad:

$$|g'(\alpha_n)| = |-\frac{1}{2n}\frac{(1 + \alpha_n)^{\frac{1}{2n}}}{1 + \alpha_n}| = \frac{1}{2n}\frac{-\alpha_n}{1 + \alpha_n}.$$

Luego, α_n será contractivo para g si y solamente si $\frac{-\alpha_n}{1+\alpha_n} < 2n$, o equivalentemente, si $\alpha_n > -\frac{2n}{2n+1}$. Basta con determinar el signo de $f_n(-\frac{2n}{2n+1})$ para conocer el sector en el que se encuentra α_n. Calculemos entonces $f_n\left(-\frac{2n}{2n+1}\right)$:

$$f_n\left(-\frac{2n}{2n+1}\right) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} + \frac{2n}{2n+1} - 1 = \frac{(2n)^{2n} - (2n+1)^{2n-1}}{(2n+1)^{2n}}$$

Probemos a continuación que $(2n)^{2n} > (2n+1)^{2n-1}$ para todo entero positivo n. En efecto:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n-1} &= \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\frac{2n}{2n+1} \\ &< \left(\frac{e}{2n+1}\right)2n < 2n, \forall n \geq 1,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que la sucesión $(1+\frac{1}{2n})^{2n}$ es creciente y converge a e por la izquierda. Reescribiendo la última desigualdad obtenemos que $(2n)^{2n} > (2n+1)^{2n-1}$, y en consecuencia $f_n(-\frac{2n}{2n+1}) > 0$. Puesto que $f_n(0) < 0$ y f_n es continua, por el Teorema de Bolzano deducimos que $\alpha_n > -\frac{2n}{2n+1}$. Luego α_n es contractivo para g, y el método iterativo propuesto admite algún intervalo que contiene a α_n y garantiza convergencia.

e) Puesto que $g'(\alpha_n) \neq 0$, este método tiene orden 1, en caso de converger. El método de Newton-Raphson asegura convergencia cuadrática (o superior), siempre que $f_n'(\alpha_n) \neq 0$. Pero esta derivada es siempre negativa en todo $[-1, 0]$, por lo que en particular $f'(\alpha_n) \neq 0$. Una propuesta válida es entonces el método de Newton-Raphson:

$$h(x_{k+1}) = x_k - \frac{f_n(x_k)}{f_n'(x_k)}.$$

Ejercicio 2 (40 puntos)

a) Ver teórico.

b) Usando la sugerencia y la definición del método iterativo,

$$
\begin{aligned}
AX_{k+1} &= AX_k + AX_{k+1}(\mathrm{Id} - AX_k) \\
\mathrm{Id} - AX_{k+1} &= \mathrm{Id} - AX_k - AX_{k+1}(\mathrm{Id} - AX_k) \\
\mathrm{Id} - AX_{k+1} &= (\mathrm{Id} - AX_k)(\mathrm{Id} - AX_k) \\
\mathrm{Id} - AX_{k+1} &= (\mathrm{Id} - AX_k)^2
\end{aligned}
$$

Usando: $\mathrm{Id} - AX_{k+1} = (\mathrm{Id} - AX_k)^2$ de manera recursiva hasta X_0 concluimos lo siguiente.

$$\mathrm{Id} - AX_{k+1} = (\mathrm{Id} - AX_0)^{2(k+1)}$$

Si tomamos limite en k a infinito, usando la parte 1., si $\rho(\mathrm{Id} - AX_o) < 1$ entonces el termino de la derecha converge a 0.

Por lo tanto, $\mathrm{Id} - AX_{k+1} = 0$ y finalmente $\mathrm{Id} = AX_{k+1}$, lo cual es la definición de matriz inversa.

c) Usando la parte 2.,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Id} - AX_{k+1} &= (\mathrm{Id} - AX_k)^2 \\
A(A^{-1} - X_{k+1}) &= A(A^{-1} - X_k)A(A^{-1} - X_k) \\
(A^{-1} - X_{k+1}) &= (A^{-1} - X_k)A(A^{-1} - X_k)
\end{aligned}
$$

Tomando norma a ambos lados y aplicando la propiedad sub-multiplicativa:

$$\|A^{-1} - X_{k+1}\| \leq \|A^{-1} - X_k\|\|A\|\|A^{-1} - X_k\|$$

$$\frac{\|A^{-1} - X_{k+1}\|}{\|A^{-1} - X_k\|^2} \leq \|A\|$$

Con lo cual tomando limite en k.

$$\lim_k \frac{\|A^{-1} - X_{k+1}\|}{\|A^{-1} - X_k\|^2} \leq \|A\|$$

Como A es invertible, entonces $\|A\| \neq 0$. Por lo tanto, el orden es por lo menos 2.

d) Calculamos el radio espectral de

$$\mathrm{Id} - AX_k = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{para decidir la convergencia.}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = 1/2$, por lo tanto $\rho(\mathrm{Id} - AX_o) = 1/2$ y la iteración converge. Los valores de la iteración a calcular son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.75 \\ -0.75 & 0.75 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1.875 & -0.9375 \\ -0.9375 & 0.9375 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1.9922 & -0.9960 \\ -0.9960 & 0.9961 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (30 puntos)

a) La ecuación diferencial puede resolverse mediante separación de variables

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 1.2)y$$

entonces,

$$\frac{dy}{y} = (x^2 - 1.2)\,dx$$

Por integración se llega a

$$log(y) = \frac{1}{3}x^3 - 1.2x + cte$$

de donde

$$y = ke^{\frac{1}{3}x^3 - 1.2x}$$

imponiendo la condición inicial, queda $k = 1$. Por lo tanto obtenemos

$$\boxed{y_A(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - 1.2x}}$$

b) Tomando la función $f(x, y) = x^2y - 1.2y$, el método de Euler con paso h nos proporciona las aproximaciones

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = {x_k}^2 y_k - 1.2y_k$$

donde $x_k = hk$ y $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

Para $h = 0.5$ quedan

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$e_k = \lvert y_k - y(x_k)\rvert$
0	0.0	1.0	1.0	0
1	0.5	0.4	0.5721618727	0.1721618727
2	1.0	0.21	0.4203503845	0.2103503845

Para $h = 0.25$ quedan

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$e_k = \lvert y_k - y(x_k)\rvert$
0	0.00	1.0	1.0	0
1	0.25	0.7	0.7446867144	0.04468671437
2	0.50	0.5009375	0.5721618727	0.07122437274
3	0.75	0.3819648437	0.4679588099	0.08599396614
4	1.00	0.3210891968	0.4203503845	0.09926118773

c) Errores absolutos

$$e_{0.5} = 0.21 \quad \text{y} \quad e_{0.25} = 0.099$$

Errores relativos

$$r_{0.5} = \frac{0.21}{0.42} = 0.50 \quad \text{y} \quad r_{0.25} = \frac{0.099}{0.42} = 0.24$$

El cociente

$$\frac{e_{0.5}}{e_{0.25}} = \frac{0.21}{0.099} = 2.12 \approx 2$$

por lo tanto al duplicar el paso se duplica se duplica el error lo que es coherente con el orden 1 del método.