Examen - Métodos Numéricos

14 de febrero de 2011

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (40 puntos)

Consideremos el método iterativo $x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + r$ aplicado al sistema lineal $Ax = b$. Sea α su única solución.

a) Demostrar el siguiente enunciado: $\rho(Q) < 1 \leftrightarrow (\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, x^{(n)} \to \alpha)$.
b) Describir el método de Jacobi, calculando la matriz Q y el vector r.
c) Demostrar que si la matriz A es diagonal dominante, entonces el método de Jacobi es convergente. Enunciar los teoremas utilizados.
d) Considérese el sistema lineal caracterizado por $b = (0,1)^t$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar si el método de Jacobi es convergente en este caso.

Problema 2 (30 puntos)

a) Enunciar el problema de ajuste por mínimos cuadrados lineal (PMCL).
b) Demostrar que las soluciones de las ecuaciones normales y del PMCL coinciden.
c) Estudiaremos el problema de hallar los valores propios de una matriz real. Definimos: $F(\lambda, v) = Av - \lambda v$, donde λ es valor propio de A asociado a v si y sólo si $F(\lambda, v) = 0$. Dado v' una aproximación de un vector propio v con valor propio asociado λ, hallar un estimador de λ a partir de A y v'.
Sugerencia: minimizar la función de una variable $||F(\lambda, v')||_2$.
d) Hallar los valores y vectores propios de la matriz A.
Usando $v' = (1, 3/4)^t$ y la parte (c), estimar un valor propio de A.
Calcular el error relativo de la estimación.

Ejercicio 3 (30 puntos)

a) Demostrar que el polinomio interpolante de una función par por las abscisas $\{-x_n, \ldots, -x_1, 0, x_1, \ldots, x_n\}$ es también par, siendo $0 < x_1 < \cdots < x_n$.
Recordar que una función f es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x de su dominio.
b) Se desea aproximar a la función $f(x) = cos^2(\pi x)$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ con una interpolación de 5 puntos. Calcular su polinomio interpolante $p(x)$ por el método de Lagrange, en las abscisas $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$.
c) Exprese el polinomio p en su forma general.
Sugerencia: Notar que $f(x)$ es par.
Luego resolver un sistema lineal para hallar el polinomio p.
d) Acotar el error de interpolación cometido al aproximar f por p, en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Solución Examen - Métodos Numéricos

Ejercicio 1 (40 puntos)

a) Ver Teórico.
b) Ver Teórico.
c) Ver Teórico.
d) En este caso tenemos que $det(\lambda I - Q) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$, por lo que $\rho(Q) = 2 > 1$, y el método de Jacobi no es convergente.

Ejercicio 2 (30 puntos)

a) Ver Teórico.
b) Ver Teórico.
c) Se busca como estimador a x tal que $min_x||F(x, v')|| = min_x||v'x - Av'||$. La solución verifica las ecuaciones normales: $v'^T * v' * x = v'^T * A * v'$. El estimador resulta: $x = (v'^T * v')^{-1} v'^T * A * v'$
d) El polinomio característico es: $(\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Los valores propios resultan: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. La estimación de λ_1 considerando $v' = (1, 0, 75)$ es $x = \frac{73}{25} = 2,92$. El error relativo es $Err = 0.0266$.

Ejercicio 3 (30 puntos)

a) Sea f una función par. En particular sabemos que $f(x_i) = f(-x_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. El polinomio interpolante de menor grado por los puntos con abscisas $\{-x_1, \ldots, -x_n, 0, x_1, \ldots, x_n\}$ es único. Sean l_k y l_{-k} los polinomios de la base de Lagrange asociados a las respectivas abscisas x_{-k} y $-x_k$. De hecho, tenemos por definición que:

$$l_k(x) = \frac{x \prod_{i \neq k}(x - x_i) \prod_i (x + x_i)}{x_k \prod_{i \neq k}(x_k - x_i) \prod_i (x_k + x_i)} = \frac{x[\prod_{i \neq k}(x^2 - x_i^2)](x + x_k)}{2x_k^2[\prod_{i \neq k}(x_k^2 - x_i^2)]} \tag{1}$$

Mientras que:

$$l_{-k}(x) = \frac{x \prod_i (x - x_i) \prod_{i \neq k}(x + x_i)}{x_k \prod_i (x_k - x_i) \prod_{i \neq k}(x_k + x_i)} = \frac{x[\prod_{i \neq k}(x^2 - x_i^2)](x - x_k)}{2x_k^2[\prod_{i \neq k}(x_k^2 - x_i^2)]} \tag{2}$$

Por evaluación directa de las Ecuaciones (1) (2) se obtiene que $l_k(-x) = l_{-k}(x)$. Si denotamos mediante l_0 al polinomio de la base de Lagrange asociado a $x = 0$ es directo obtener que $l_0(x) = l_0(-x)$. Entonces, el polinomio interpolante buscado $p(x)$ cumple que:

$$p(-x) = \sum_{k=-n}^{n} f(-x_k) l_k(-x) = \sum_{k=-n}^{n} f(-x_k) l_{-k}(x) = p(x),$$

donde en el último paso se han reordenado los términos de la sumatoria al revés. Luego, el polinomio interpolante p es par, como se quería demostrar.

b) El polinomio interpolante de Lagrange se puede expresar directamente como combinación lineal de la base de Lagrange:

$$p(x) = \frac{1}{2}\frac{(x + \frac{\pi}{2})x(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})}{(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})(-\frac{\pi}{4})(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2}\frac{(x + \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{4})x(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} + \frac{(x + \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4})(-\frac{\pi}{4})(-\frac{\pi}{2})}$$

b) Como $f(x) = cos^2(x)$ es par, por lo probado en la primera parte $p(x)$ también lo es, y por lo tanto admite la forma general siguiente:
$$p(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
Puesto que $p(0) = f(0) = 1$ tenemos que $c = 1$. Además tenemos que $p(\frac{\pi}{2}) = 0$ y $p(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. Resolviendo el anterior sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas obtenemos que:
$$p(x) = \frac{1}{12u^2}\left(\frac{x^4}{u^2} - 7x^2 + 12u^2\right),$$
siendo $u = \frac{\pi}{4}$. Se comprueba rápidamente que $p(u) = p(-u) = \frac{1}{2}$, $p(0) = 0$ y $p(2u) = p(-2u) = 0$, por lo que $p(x)$ es efectivamente el polinomio interpolante buscado.

c) Sabemos por el teorema de acotación del error por interpolación polinómica que para cada $x \in [0, \pi]$ existe $w_x \in [0, \pi]$ tal que:
$$f(x) - p(x) = \frac{f^5(w_x)}{5!} \prod_{i=-2}^{2} (x - x_i)$$
Una cota válida aunque no rígida es por ejemplo $16\frac{\pi^5}{5!}$.