Examen - Métodos Numéricos

28 de enero de 2012

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Se desea resolver la ecuación $x = f(x)$. Para ello se considera un método iterativo general dado por:

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) = x^{(k)} + 2\,m\,(x^{(k)} - f(x^{(k)})), \quad m \in \mathbb{R}, m \neq 0. \end{cases}$$

a) Demostrar que si $x^{(k)} \to \alpha$, entonces α es solución de $f(x) = x$.
b) Hallar el valor de m que maximice el orden de convergencia.
Enunciar los teoremas utilizados.
c) Encontrar la velocidad y orden de convergencia para resolver la ecuación $\frac{2}{x} = x$.
d) Iterar partiendo de $x_0 = 4$ hasta obtener un error menor que $0,1$.

Problema 2 (35 puntos)

a) Enunciar el problema de ajuste por mínimos cuadrados lineal (PMCL).
b) Demostrar que la solución del PMCL y el sistema de ecuaciones normales coinciden.
c) Estudiaremos el problema de hallar los valores propios de una matriz real. Definimos: $F(\lambda, v) = Av - \lambda v$, donde λ es valor propio de A asociado a v si y sólo si $F(\lambda, v) = 0$. Dado v' una aproximación de un vector propio v con valor propio asociado λ, hallar un estimador de λ a partir de A y v'.
Sugerencia: aplicar el criterio de mínimos cuadrados a $F(\lambda, v')$.
d) Hallar los valores y vectores propios de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Usando $v' = (1, 0.75)^t$ y la parte c), estimar un valor propio de A.
Calcular el error relativo de la estimación.

Problema 3 (30 puntos)

Se pretende comparar el desempeño de dos métodos de integración numérica, basados en el Trapecio y Euler hacia adelante. Para cada natural n, el número $I(n) = \int_0^1 t^n dt$ se puede obtener resolviendo el siguiente Problema de Valores Iniciales (PVI):

$$\begin{cases} y'(t) = t^n \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) Calcular $I(n)$, para todo natural n.
b) Estimar $I(n)$ resolviendo el PVI mediante Euler hacia adelante, con paso $h = \frac{1}{5}$.
Sugerencia: Utilizar que $y_5 = \sum_{k=0}^{4}(y_{k+1} - y_k)$.
c) Denotemos $I^*(n)$ al anterior estimador.
Hallar el primer natural n_{min} que verifica $I(n_{min}) \neq I^*(n_{min})$.
Sugerencia: Buscar n_{min} comenzando desde $n = 0$.
d) Análogamente, obtener un nuevo estimador $J^*(n)$ aplicando ahora el método del Trapecio.
Hallar el primer natural n'_{min} tal que $I(n'_{min}) \neq J^*(n'_{min})$.
e) Contrastar ambos métodos cuando $n = 2$.

Nota: la prueba debe realizarse sin ningún material y en un tiempo máximo de 3 horas y media.

Solución Examen - Métodos Numéricos

28 de enero de 2012

Ejercicio 1 (35 puntos)

a) Sabemos que $x^{(k)} \to \alpha$. Sustituyendo obtenemos

$$\alpha = g(\alpha) = \alpha + 2\,m\,(\alpha - f(\alpha)$$

cancelando términos:

$$0 = 2\,m\,(\alpha - f(\alpha))$$

puesto que $m \neq 0$ tenemos que $f(\alpha) = \alpha$.

b) Se desea obtener la mejor convergencia, lo que se traduce a un mayor orden de convergencia. Por lo tanto, buscamos m tal que $g'(\alpha) = 0$:

$$g'(\alpha) = 1 + 2m(1 - f'(\alpha) = 0,$$

y despejando

$$m = \frac{1}{2(f'(\alpha) - 1)}.$$

Con este valor de m se consigue orden de convergencia cuadrático o superior (si $f''(\alpha) = 0$).

c) Utilizando que la solución de la ecuación se da en $\alpha = \sqrt{2}$ obtenemos el valor de m sustituyendo:

$$m = \frac{1}{2(-\frac{2}{(\sqrt{2})^2} - 1)} = -\frac{1}{4}$$

$$g''(x) = -2m\,f''(x) = -2\,(-\frac{1}{4})\,\frac{4}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

El orden como vimos en la parte b es 2 y la velocidad de convergencia es

$$\beta = \frac{|g''(\sqrt{2})|}{2!} = \frac{|(\frac{2}{(\sqrt{2})^3})|}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

d) Resultados numéricos obtenidos

k	x^k	$f(x^k)$
0	4	0.5
1	2.25	0.89
2	1.57	1.27
3	1.42	1.41

Ejercicio 2 (35 puntos)

a) Ver Teórico

b) Ver Teórico

c) Se busca como estimador a x tal que $min_x||F(x,v')|| = min_x||v'x - Av'||$. La solución verifica las ecuaciones normales: $v'^T * v' * x = v'^T * A * v'$. El estimador resulta: $x = (v'^T * v')^{-1} v'^T * A * v'$

d) El polinomio característico es: $(\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Los valores propios resultan: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. La estimación de λ_1 considerando $v' = (1, 0, 75)$ es $x = \frac{73}{25} = 2,92$. El error relativo es $Err = 0.0266$.

Ejercicio 3 (30 puntos)

a)

$$I(n) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

b) El PVI de estudio se caracteriza por $f(t,x) = t^n$. Aplicando el método de Euler hacia adelante con paso $h = \frac{1}{5}$ tenemos que:

$$y_{k+1} - y_k = hf(t_k, y_k) = \frac{1}{5}\left(\frac{k}{5}\right)^n.$$

Se observa que $y(1) = I(n)$. El estimador de $I(n)$ es entonces $I^*(n) = y_5$.
Siguiendo la sugerencia:

$$I^*(n) = \sum_{k=0}^{4}(y_{k+1} - y_k) = \frac{1}{5^{n+1}}\sum_{k=0}^{4} k^n.$$

c) Sustituyendo con $n = 0$ tenemos que $I^*(0) = \frac{5}{5^1} = 1 = I(0)$. Si $n = 1$:

$$I^*(1) = \frac{10}{25} \neq \frac{1}{2}.$$

Luego $n_{min} = 1$.

d) Aplicando ahora el método del Trapecio:

$$y_{k+1} - y_k = \frac{1}{10}(\left(\frac{k+1}{5}\right)^n + \left(\frac{k}{5}\right)^n).$$

Luego:

$$J^*(n) = \sum_{k=0}^{4}(y_{k+1} - y_k) = \frac{1}{10}(1 + 2\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{i}{5}\right)^n).$$

Se comprueba directamente que $J^*(0) = I(0)$ y que $J^*(1) = I(1)$. Sustituyendo con $n = 2$:

$$J^*(2) = \frac{1}{10}(1 + \frac{2}{5^2}\frac{5 \times (5-1) \times (2 \times 5 - 1)}{6}) = \frac{1}{3} - \frac{23}{300} \neq \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, $n'_{min} = 2$.

e) Sustituyendo con $n = 2$ en Euler hacia adelante tenemos que:

$$I^*(2) = \frac{1}{5^3}\sum_{k=0}^{4} k^2 = \frac{30}{125} = \frac{6}{25} = \frac{1}{3} - \frac{7}{75},$$

por lo que se comete un error de integración de $\frac{7}{75} \approx 0,0933$. Con el método del Trapecio ya vimos que:

$$J^*(2) = \frac{1}{3} - \frac{23}{300},$$

por lo que el error de integración se reduce a $\frac{23}{300} \approx 0,0766$. Ambas estimaciones son por defecto (geométricamente, los trapecios y los segmentos de Euler se hallan por debajo de la parábola), aunque el error cometido por el método del Trapecio es inferior, y por tanto este último método es preferible.

Observaciones: los resultados obtenidos son intuitivos. Con el método de Euler se integran constantes exactamente, pero no rectas en general, por lo que $n_{min} = 1$. Con trapecios se integran rectas exactamente pero no parábolas. Luego $n'_{min} = 2$. Estos valores coinciden de hecho con sus órdenes de consistencia, como debe ocurrir.