Examen - Métodos Numéricos

14 de diciembre de 2011

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (30 puntos)

Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria con su respectiva condición inicial:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 - y & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Halle su solución exacta

b) Realice cuatro pasos del método de *Euler* hacia adelante con $h = 0.1$. Compare la solución numérica con la exacta calculando el error absoluto de $y(0.4)$.

c) Genere una nueva sucesión aplicando *Euler* con paso $h = 0.2$. Luego, utilizando *Richardson* mejore la aproximación en $x = 0.4$.

Ejercicio 2 (40 puntos)

a) Sea $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con p derivadas continuas en $[a,b]$. Sea $\alpha \in (a,b)$ punto fijo de $g(x)$. Demostrar que si $g^{(i)}(\alpha) = 0$, para $i = 1, \ldots, p-1$, y $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, entonces el orden de convergencia del MIG es p con constante $\beta = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!}$.
($g^i(\alpha)$ denota la derivada i-ésima de $g(\cdot)$ evaluada en α).

b) Describa el Método de Newton-Raphson para hallar la raíz de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

c) Describa el Método de Gauss-Newton para la resolución de un Problema de Mínimos Cuadrado No Lineal.

d) Sea $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 - 2/x_3\, ,\, x_1^2 - 2x_2\, ,\, x_3^2 - 2x_2)$.
Aplicar 3 iteraciones de Newton-Raphson partiendo de $X_0 = (1, 0, 1)$.

Ejercicio 3 (30 puntos)

a) Demostrar que el polinomio interpolante de una función par por las abscisas $\{-x_n, \ldots, -x_1, 0, x_1, \ldots, x_n\}$ (donde $0 < x_i < x_{i+1} \, \forall i = 1, \ldots, n-1$), es también par. Recordar que una función f es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x de su dominio.

b) Se desea aproximar a la función $f(x) = cos^2(\pi x)$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Calcular su polinomio interpolante $p(x)$ por el método de Lagrange, en las abscisas $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}\}$.

c) Expresar el polinomio $p(x)$ como suma de monomios, resolviendo el sistema lineal dado por la matriz de Vandermonde. *Sugerencia*: utilizar que $p(x)$ es par.

d) Acotar el error de interpolación cometido al aproximar f por p, en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Nota: la prueba debe realizarse sin ningún material y en un tiempo máximo de 3 horas y media.

Solución Examen - Métodos Numéricos

14 de diciembre de 2011

Ejercicio 1

a) Para resolver analíticamente la ecuación

$$\begin{cases} y'(x) & = x^2 - y(x) \qquad x \in [0,1] \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

Planteamos la ecuación homogenea asociada

$$y_h'(x) = -y_h(x)$$

Luego, la reescribimos como

$$\frac{y_h'(x)}{y_h(x)} = -1$$

Integramos esta última y obtenemos la siguiente

$$log(|y_h(x)|) = \int \frac{y_h'(x)}{y_h(x)}\,dx = \int -1\,dx = -x + cte$$

Que se puede reescribir como

$$y_h(x) = ce^{-x}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Ahora, observemos que

$$y_p(x) = x^2 - 2x + 2$$

es una solución particular de la ecuación $y'(x) = x^2 - y(x)$.

Para hallar la solución de la ecuación (1) debemos determinar la constante $c \in \mathbb{R}$ para que se verifique la condición inicial $y(0) = 1$. Ahora la función $y(x)$ que buscamos cumple que

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

Imponemos que $y(0) = 1$ y nos queda que $c = -1$.

Con lo que la solución de la ecuación (1) es

$$y(x) = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

b) Consideremos la ecuación genérica

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \qquad x \in [0,1] \\ y(0) & = y_0 \end{cases}$$

y paso $h \in \mathbb{R}$. El método de Euler para el iteración $k+1$ tiene la siguiente fórmula

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

Las 4 iteraciones para nuestro caso son

k	x_k	$f(x_k, y_k)$	y_k
0	0.0	-1.00000	1.00000
1	0.1	-0.89000	0.90000
2	0.2	-0.77100	0.81100
3	0.3	-0.64390	0.73390
4	0.4	-0.50951	0.66951

$$\epsilon = |y_{Euler}(0.4) - y_{Exacta}(0.4)| = |0.66951 - 0.68968| = 0.020\ldots$$

c) Para este caso son solamente 2 iteraciones

k	x_k	$f(x_k, y_k)$	y_k
0	0.0	-1.00000	1.00000
1	0.2	-0.76000	0.80000
2	0.4	-0.48800	0.64800

La nueva aproximación es $y(0.4) = 0.64800$. Y el nuevo error es:

$$\epsilon = |y_{Euler}(0.4) - y_{Exacta}(0.4)| = |0.6480 - 0.68968| = 0.0417\ldots$$

Recordemos que si tenemos $\varphi(h)$ una aproximación de una magnitud L de orden $O(h^p)$, o sea

$$L = \varphi(h) + O(h^p)$$

Entonces la aproximación de Richardson

$$L = \frac{(2^p \varphi\left(\frac{h}{2}\right) - \varphi(h))}{(2^p - 1)} + O(h^{p+1})$$

es de orden por lo menos $p + 1$.

En nuestro caso queremos mejorar la aproximación de $y(0.4)$ que es de orden $O(h)$. Tomamos $h = 0.2$ y tenemos que $\varphi(h) = y_{h=0.2} = 0.64800$, $\varphi\left(\frac{h}{2}\right) = y_{h=0.1} = 0.66951$ por lo tanto la nueva aproximación es

$$y_{Rich}(0.4) = \frac{(2y_{h=0.1}(0.4) - y_{h=0.2}(0.4))}{1} + O(h^2)$$

Por lo que la aproximación mejorada con Richardson nos queda

$$y_{Rich}(0.4) = \frac{(2 * 0.66951 - 0.64800)}{1} + O(h^2) = 0.6910 + O(h^2)$$

observar que

$$\epsilon = |y_{Exacta}(0.4) - y_{Rich}(0.4)| = |0.68968 - 0.6910| = 0.0013\ldots$$

Ejercicio 2

a)-c) Ver teórico.

d) Jacobiano de la función

$$J_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 2/x_3^2 \\ 2x_1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

La iteración general de Newton será:

$$X_{k+1} = X_k - J_f^{-1} f(X_k)$$

aplicando obtenemos

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.5000 \\ 1.0000 \\ 1.5000 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.41443 \\ 0.99664 \\ 1.41443 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.41421 \\ 1.00000 \\ 1.41421 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

a) Sea f una función par. En particular sabemos que $f(x_i) = f(-x_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. El polinomio interpolante de menor grado por los puntos con abscisas $\{-x_1, \ldots, -x_n, 0, x_1, \ldots, x_n\}$ es único. Sean l_k y l_{-k} los polinomios de la base de Lagrange asociados a las respectivas abscisas x_{-k} y $-x_k$. De hecho, tenemos por definición que:

$$l_k(x) = \frac{x \prod_{i \neq k}(x - x_i) \prod_i (x + x_i)}{x_k \prod_{i \neq k}(x_k - x_i) \prod_i (x_k + x_i)} = \frac{x[\prod_{i \neq k}(x^2 - x_i^2)](x + x_k)}{2x_k^2[\prod_{i \neq k}(x_k^2 - x_i^2)]} \tag{1}$$

Mientras que:

$$l_{-k}(x) = \frac{x \prod_i (x - x_i) \prod_{i \neq k}(x + x_i)}{x_k \prod_i (x_k - x_i) \prod_{i \neq k}(x_k + x_i)} = \frac{x[\prod_{i \neq k}(x^2 - x_i^2)](x - x_k)}{2x_k^2[\prod_{i \neq k}(x_k^2 - x_i^2)]} \tag{2}$$

Por evaluación directa de las Ecuaciones (1) (2) se obtiene que $l_k(-x) = l_{-k}(x)$. Si denotamos mediante l_0 al polinomio de la base de Lagrange asociado a $x = 0$ es directo obtener que $l_0(x) = l_0(-x)$. Entonces, el polinomio interpolante buscado $p(x)$ cumple que:

$$p(-x) = \sum_{k=-n}^{n} f(-x_k) l_k(-x) = \sum_{k=-n}^{n} f(-x_k) l_{-k}(x) = p(x),$$

donde en el último paso se han reordenado los términos de la sumatoria al revés. Luego, el polinomio interpolante p es par, como se quería demostrar.

b) El polinomio interpolante de Lagrange se puede expresar directamente como combinación lineal de la base de Lagrange:

$$p(x) = \frac{1}{2}\frac{(x+\frac{1}{2})x(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})(-\frac{1}{4})(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4})(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2})} + \frac{1}{2}\frac{(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{4})x(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})} + \frac{(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})(-\frac{1}{4})(-\frac{1}{2})}$$

c) Como $f(x) = cos^2(x)$ es par, por lo probado en la primera parte $p(x)$ también lo es, y por lo tanto admite la forma general siguiente:

$$p(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

Puesto que $p(0) = f(0) = 1$ tenemos que $c = 1$. Además tenemos que $p(\frac{1}{2}) = 0$ y $p(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$. Resolviendo el anterior sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas obtenemos que:

$$p(x) = \frac{64}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^2 + 1,$$

Se comprueba rápidamente que $p(\frac{1}{4}) = p(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, $p(0) = 1$ y $p(\frac{1}{2}) = p(-\frac{1}{2}) = 0$, por lo que $p(x)$ es efectivamente el polinomio interpolante buscado.

d) Sabemos por el teorema de acotación del error por interpolación polinómica que para cada $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ existe $w_x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(w_x)}{5!}\prod_{i=-2}^{2}(x - x_i),$$

donde $f^{(5)}$ denota la derivada quinta de la función f.

Calculemos la derivada quinta de $f(x) = cos^2(\pi x)$, comenzamos por la derivada primera:

$$(cos^2(\pi\, x))' = 2\, cos(\pi\, x)\, (-sen(\pi\, x)\, \pi) = -2\, \pi\, (cos(\pi\, x)\, sen(\pi\, x)$$

usando la identidad trigonométrica $sen(2\theta) = 2\, sen(\theta)\, cos(\theta)$ obtenemos

$$(cos^2(\pi\, x))' = -\pi\, sen(2\, \pi\, x)$$

por lo que podemos concluir que la derivada quinta de $f(x)$ está acotada por $16\pi^5$.

De esta forma podemos decir que una cota válida para el error de interpolación es entonces $16\frac{\pi^5}{5!}$.