Examen - Métodos Numéricos

28 de julio de 2011

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (32 puntos)

Sea el sistema de ecuaciones $A\,x = b$, siendo A una matriz $n \times n$ no singular:

a) Explique el método de escalerización gaussiana sin pivoteo.

b) Escriba un pseudo-código para resolver el sistema utilizando el método de la parte a). Determine la cantidad de operaciones necesarias.

c) Explique el método de Jacobi y exprese la iteración k del mismo de la forma

$$x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + r$$

siendo Q una matriz función de L y U (matrices triangular inferior y superior) y D matriz diagonal, las cuales verifican $A = D + L + U$.

d) Enumere alguna condición que deba cumplir Q para asegurar la convergencia de Jacobi.

Ejercicio 2 (39 puntos)

Sea $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no lineal

a) Deducir el metodo de Newton-Raphson para resolver $f(x) = 0$, enumerando las hipótesis necesarias para poder definir el método.

b) Dar condiciones para que el metodo de Newton-Raphson converja dado un punto cercano a la solución del sistema.

c) Dada la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$ encontrar un punto inicial en que el metodo no converja.

d) Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, con raiz 0, hallar la iteración de Newton-Raphson y demostrar que no converje para cualquier punto inicial no nulo. En que contradice las condiciones dadas en (b). ¿Como modificaría el método para hallar numericamente una raiz de esa función?.

Ejercicio 3 (29 puntos)

Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria con su respectiva condición inicial:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 - y & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Halle su solución exacta

b) Aplique cuatro pasos del método de Euler hacia adelante con $h = 0.1$. Compare con la evaluación de la solución exacta.

c) Genere una nueva sucesión utilizando Euler y paso 0.2. Luego, utilizando Richardson mejorar la aproximación en $x = 0.4$.

Nota: la prueba debe realizarse sin ningún material y en un tiempo máximo de 3 horas y media.

Solución Examen - Métodos Numéricos

27 de julio de 2011

Ejercicio 1 (32 puntos)

a) (5 ptos) Ver Teórico.
b) (13ptos: 8 ptos pseudocodigo + 5 ptos num ops)

for $k = 1 \to n-1$ **do**
  for $i = k+1 \to n$ **do**
    $l(i,k) \leftarrow A(i,k)/A(k,k)$
    for $j = k \to n$ **do**
      $A(i,j) \leftarrow A(i,j) - l(i,k) * A(k,j)$
    end for
    $b(i) \leftarrow b(i) - l(i,k) * b(k)$
  end for
end for

En cada iteración de k se realizan $(n-k)(n-k+1)$ operaciones "sumas y productos".

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = n^3 - (2n+1)(n-1)\frac{n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \approx \frac{n^3}{3}$$

en el caso que se consideren también las divisiones se agrega un término $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)$ pero no se modifica el orden n^3

En el caso de que se consideren sumas y productos como operaciones separadas la cantidad de operaciones será $\frac{2n^3}{3}$

c) (10 ptos.) Ver Teórico.
d) (4 ptos.) Dos de las condiciones son

$$\|Q\|_\infty < 1 \qquad \text{o} \qquad \rho(Q) < 1.$$

Ejercicio 2 (39 puntos)

a) (8 ptos.)
Deducir el metodo de Newton-Raphson.
Ver Teórico.

b) (9 ptos.)
Dar condiciones para que el metodo de Newton-Raphson converja dado un punto cercano a la solucion del sistema.
Ver Teorico.

c) (7 ptos)
Dada la funcion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ encontrar un punto inicial en que el metodo no converja.

Si tomamos $x_0 = 0$ entonces $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, ... y la sucesion generado por el metodo de Newton-Raphson entra en un ciclo, por lo que no converge.

d) (15 ptos: 10 hallar iteracion general y x de no converj + 5 ptos proponer metodo mejor)
Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, con raiz 0, hallar la iteracion de Newton-Raphson y demostrar que no converje para cualquier punto inicial no nulo. En que contradice las condiciones dadas en (). Como solucionaria el problema?, o sea como cambiaria el metodo para hallar numericamente una raiz de esa funcion?.

Calculamos la iteración de Newton-Raphson $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt[3]{x_n}}{1/3\sqrt[3]{x_n^2}} = x_n - 3\sqrt[3]{x_n}\sqrt[3]{x_n^2} = -2x_n$. Entonces $x_n = (-2)^n x_0$, que converge si y solo si $x_0 = 0$.

Contradice las condiciones en que $\sqrt[3]{x}$ no es derivable en 0.

Si aplicamos el metodo de la secante con valores iniciales x_0 real positivo y $x_1 = -x_0$ el metodo converge.

Ejercicio 3 (29 puntos)

a) (9 ptos: 4 sol homog + 4 sol par + 1 cond i)
Para resolver analíticamente la ecuación

$$\begin{cases} y'(x) &= x^2 - y(x) \qquad x \in [0,1] \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Planteamos la ecuación homogenea asociada

$$y_h'(x) = -y_h(x)$$

Luego, la reescribimos como

$$\frac{y_h'(x)}{y_h(x)} = -1$$

Integramos esta última y obtenemos la siguiente

$$log(|y_h(x)|) = \int \frac{y_h'(x)}{y_h(x)}\,dx = \int -1\,dx = -x + cte$$

Que se puede reescribir como

$$y_h(x) = ce^{-x}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Ahora, observemos que

$$y_p(x) = x^2 - 2x + 2$$

es una solución particular de la ecuación $y'(x) = x^2 - y(x)$.

Para hallar la solución de la ecuación (1) debemos determinar la constante $c \in \mathbb{R}$ para que se verifique la condición inicial $y(0) = 1$. Ahora la función $y(x)$ que buscamos cumple que

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

Imponemos que $y(0) = 1$ y nos queda que $c = -1$.

Con lo que la solución de la ecuación (1) es

$$y(x) = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

b) (10 ptos : 6 metodo + 1 por iteracion) Consideremos la ecuación genérica

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \qquad x \in [0,1] \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

y paso $h \in \mathbb{R}$. El método de Euler para el iteración $k+1$ tiene la siguiente fórmula

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

Las 4 iteraciones para nuestro caso son

k	x_k	$f(x_k, y_k)$	y_k
0	0.0	-1.00000	1.00000
1	0.1	-0.89000	0.90000
2	0.2	-0.77100	0.81100
3	0.3	-0.64390	0.73390
4	0.4	-0.50951	0.66951

$$\epsilon = |y_{Euler}(0.4) - y_{Exacta}(0.4)| = |0.66951 - 0.68968| = 0.020\ldots$$

c) (10 ptos)

Para este caso son solamente 2 iteraciones

k	x_k	$f(x_k, y_k)$	y_k
0	0.0	-1.00000	1.00000
1	0.2	-0.76000	0.80000
2	0.4	-0.48800	0.64800

La nueva aproximación es $y(0.4) = 0.64800$. Y el nuevo error es:

$$\epsilon = |y_{Euler}(0.4) - y_{Exacta}(0.4)| = |0.6480 - 0.68968| = 0.0417\ldots$$

Recordemos que si tenemos $\varphi(h)$ una aproximación de una magnitud L de orden $O(h^p)$, o sea

$$L = \varphi(h) + O(h^p)$$

Entonces la aproximación de Richardson

$$L = \frac{(2^p \varphi\left(\frac{h}{2}\right) - \varphi(h))}{(2^p - 1)} + O(h^{p+1})$$

es de orden por lo menos $p+1$.

En nuestro caso queremos mejorar la aproximación de $y(0.4)$ que es de orden $O(h)$. Tomamos $h = 0.2$ y tenemos que $\varphi(h) = y_{h=0.2} = 0.64800$, $\varphi\left(\frac{h}{2}\right) = y_{h=0.1} = 0.66951$ por lo tanto la nueva aproximación es

$$y_{Rich}(0.4) = \frac{(2y_{h=0.1}(0.4) - y_{h=0.2}(0.4))}{1} + O(h^2)$$

Por lo que la aproximación mejorada con Richardson nos queda

$$y_{Rich}(0.4) = \frac{(2 * 0.66951 - 0.64800)}{1} + O(h^2) = 0.6910 + O(h^2)$$

observar que

$$\epsilon = |y_{Exacta}(0.4) - y_{Rich}(0.4)| = |0.68968 - 0.6910| = 0.0013\ldots$$