Examen - Métodos Numéricos
IMERL - Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

25 de Febrero del 2011

Ejercicio 1.

1. *a*) Ver teórico.
   b) Ver teórico.
2. Ver teórico.
3. La solución exacta es $X = (1, -1, 0)$. A continuación se presentan los pasos de escalerización con la artimética planteada, sin pivoteo.

$$A|b_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1,0000E1 & -7,0000E0 & 0,0000E0 & 7,0000E0 \\ -3,0000E0 & 2,0990E0 & 6,0000E0 & 3,9010E0 \\ 5,0000E0 & -1,0000E0 & 5,0000E0 & 6,0000E0 \end{array}\right)$$

$$A|b_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1,0000E1 & -7,0000E0 & 0,0000E0 & 7,0000E0 \\ 0,0000E0 & -1,0000E-3 & 6,0000E0 & 6,0010E0 \\ 0,0000E0 & 2,5000E0 & 5,0000E0 & 2,5000E0 \end{array}\right)$$

Tenemos un pivot pequeño en la fila 2 y columna 2.

$$A|b_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1,0000E1 & -7,0000E0 & 0,0000E0 & 7,0000E0 \\ 0,0000E0 & -1,0000E-3 & 6,0000E0 & 6,0010E0 \\ 0,0000E0 & 0,0000E0 & 1,5005E4 & 1,5004E4 \end{array}\right)$$

Aparece el primer error de redondeo al calcular $A|b_3(3,4)$.

Sustituimos hacia atrás:

$x_3 = 1,5004E4/1,5005E4 = 9,9993E-1$

$x_2 = (6,0010E0-(6,0000E0*9,9993E-1))/-1,0000E-3 = -1,4000E0$

$x_1 = (7,0000E0-(0,0000E0*9,9993E-1)-(-7,0000E0*-1,4000E0))/1,0000E1 = -2,8000E-1$

La solución difiere de la exacta a causa del error inducido por el pivot pequeño, solo encontramos un error de operación en punto flotante.

4. A continuación se presentan los pasos de escalerización con la artimética planteada, con pivoteo.

$$A|b_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1,0000E1 & -7,0000E0 & 0,0000E0 & 7,0000E0 \\ -3,0000E0 & 2,0990E0 & 6,0000E0 & 3,9010E0 \\ 5,0000E0 & -1,0000E0 & 5,0000E0 & 6,0000E0 \end{array}\right)$$

$$A|b_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1,0000E1 & -7,0000E0 & 0,0000E0 & 7,0000E0 \\ 0,0000E0 & -1,0000E-3 & 6,0000E0 & 6,0010E0 \\ 0,0000E0 & 2,5000E0 & 5,0000E0 & 2,5000E0 \end{array}\right)$$

Intercambiamos Fila 2 y Fila 3.

$$A|b_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1,0000E1 & -7,0000E0 & 0,0000E0 & 7,0000E0 \\ 0,0000E0 & 2,5000E0 & 5,0000E0 & 2,5000E0 \\ 0,0000E0 & -1,0000E-3 & 6,0000E0 & 6,0010E0 \end{array}\right)$$

$$A|b_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1,0000E1 & -7,0000E0 & 0,0000E0 & 7,0000E0 \\ 0,0000E0 & 2,5000E0 & 5,0000E0 & 2,5000E0 \\ 0,0000E0 & 0,0000E0 & 6,0020E0 & 6,0020E0 \end{array}\right)$$

Sustituimos hacia atrás:

$x_3 = 6,0020E0/6,0020E0 = 1,0000E0$

$x_2 = (6,0010E0 - (6,0000E0 * 1,0000E0))/ - 1,0000E - 3 = -1,0000E0$

$x_1 = (7,0000E0-(0,0000E0*1,0000E0)-(-7,0000E0*-1,0000E0))/1,0000E1 = 0,0000E0$

Coincide con la solución exacta y no registramos ningún error de operación en punto flotante.

Ejercicio 2.

1. Ver teórico.

2. Las iteraciones son las siguientes:

k	x^{k-1}	$f(x^{k-1})$	x^k	$f(x^k)$	$x^k - x^{k-1}$	$f(x^k) - f(x^{k-1})$	$f(x^{k+1})$
1	1,00	0,16	1,50	1,25	0,50	1,09	0,93
2	1,50	1,25	0,93	0,06	−0,57	−1,19	0,90
3	0,93	0,06	0,90	0,03	−0,03	−0,04	0,878

3. Ver teórico.

Ejercicio 3.

1. Ver teórico.

2. Ver teórico.

3. Para dar una cota superior del error, basta con maximizar el valor absoluto del error de interpolación polinómico.

$$f(t) - p(t) = \frac{f^{(2)}(\xi_t)}{2}(t - t_1)(t - t_2)$$

Con $\xi_t \in (t_1, t_2)$.

La cota es igual a

$$\text{Error} < \max_{t \in (t_1, t_2)} |\frac{f^{(2)}(\xi_t)}{2}(t - t_1)(t - t_2)|$$

El máximo de $(t - t_1)(t - t_2)$ con t entre t_1 y t_2 se da en $(t_1 + t_2)/2$ y vale $(t_2 - t_1)(t_1 - t_2)/4$. Llamando $h = t_2 - t_1$, la cota resulta:

$$\text{Error} < \max_{t \in (t_1, t_2)} |f^{(2)}(t)| \frac{h^2}{8}$$