Examen - Métodos Numéricos
IMERL - Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

1 de Febrero del 2011

Ejercicio 1.

i) Definir orden de convergencia de una sucesión real $\{x_n\}$.

ii) Sea el MIG definido por $x_{k+1} = g(x_k)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ punto fijo. Asumiendo $g(\cdot)$ continua y con $p \geq 1$ derivadas continuas en un entorno de α, y además que $\frac{d^k g}{dx^k}(\alpha) = 0$, $\forall k \in 1...p-1$, $\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha) \neq 0$, demostrar que el orden de convergencia del MIG es p, con constante $\beta = \frac{1}{p!}\left|\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha)\right|$.

iii) Deducir el Método de Netwon-Raphson para resolver una ecuación $f(x) = 0$, con $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

iv) Sea $f(x)$ con derivada segunda continua en un entorno de la raíz α y tal que $f'(\alpha) \neq 0$ y $f''(\alpha) \neq 0$.
Demostrar que la sucesión generada por Newton-Raphson converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo, y además la convergencia es cuadrática con constante $\beta = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.

Ejercicio 2.

Dada la EDO:

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(y(t), t)$$
$$y(t_0) = y_0$$

Siendo $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1. Deduzca el Método de Heun a partir del hecho que éste es un método predictor-corrector. Deberá deducir los otros métodos a ser utilizados en esta parte.

2. Defina el Error Local de un método para resolver EDOs y halle el Error Local del Método de Heun.

3. *a*) Defina el problema test y halle la región de estabilidad del Método de Heun.

   b) ¿Es este método estable para cualquier elección del paso h? Justifique su respuesta.

Ejercicio 3.

Se tiene un grupo de m datos:

t	y
t_1	y_1
t_2	y_2
...	...
t_m	y_m

Y se busca ajustar una función no-lineal $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ a dichos datos. Siendo x_i con $i = 1...n$ $(n < m)$ los parametros de ajuste.

1. Escriba, para la función anterior, el problema de ajuste por mínimos cuadrados en notación matricial.

2. Deduzca el método de Gauss-Newton para resolver el problema planteado en 2.1).

3. Indique si para ajustar las siguientes funciones es estrictamente necesario aplicar el método de Gauss-Newton, justifique sus respuestas:

   a) $\Phi(x_1, x_2, t) = x_1 e^{x_2 t}$

   b) $\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 \sin(x_2 t + x_3)$

   c) $\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 e^t + x_2 \sin(t) + x_3 \log(t)$