Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Solución Examen del 17 de Diciembre de 2010

Ejercicio 1.

Ver teórico.

Ejercicio 2.

Ver teórico.

Ejercicio 3.

i) Planteamos el sistema de ecuaciones lineales de la forma $A\,x = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Planteamos el método de Jacobi en su forma matricial:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}\,(L+U)\,x^{(k)} + D^{-1}\,b$$

donde L,U y D son los bloques de la matriz A, Estricta-Triangular-Inferior, diagonal y Estricta-Triangular-Superior respectivamente.

Reformulamos en forma general iterativa y calculamos $\mathbb{J}$ y c:

$$x^{(k+1)} = \mathbb{J}\,x^{(k)} + c$$

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

realizamos 3 iteraciones

$$x^{(1)} = x^{(2)} = x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ii) Recordamos el siguiente teorema sobre convergencia:

> El método iterativo matricial converge para todo punto de arranque **si y solo si** el radio espectral de la matriz de iteración es menor a 1.

Podemos plantear el contrarecíproco de cada dirección de razonamiento del teorema, obteniendo el siguiente enunciado:

> El método iterativo matricial no converge para algún punto de arranque **si y solo si** el radio espectral de la matriz de iteración es mayor o igual a 1

Los valores propios de $\mathbb{J}$ son 0, i y $-i$ por lo tanto el máximo módulo será 1, y $\rho(\mathbb{J}) = 1$.
Por el enunciado anterior, el método NO converge para cualquier elección de $x^{(0)}$.

iii) Escribimos Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}\,U\,x^{(k)} + (L+D)^{-1}\,b$$

obteniendo la matriz del método:

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

valores propios 0, 0, -1. Podemos concluir que el radio espectral de $\mathbb{G}$ es 1, por lo tanto el metodo NO converge.

iv) Plantemos el método de SOR

$$x^{(k+1)} = -(D+\omega L)^{-1}\,(\omega U + (\omega-1)D)\,x^{(k)} + (D+\omega L)^{-1}\,\omega\,b$$

La matriz del $\mathbb{S}$ será la siguiente:

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & -1{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & -0{,}75 & -2{,}75 \end{bmatrix}$$

Calculamos los valores propios de la matriz de iteraciones cuando $\omega = 3/2$:

$$\lambda_1 = -1/2 \qquad \lambda_2 = -0,079 \qquad \lambda_3 = -3{,}17.$$

El radio espectral es $3,17$ por lo tanto el método NO converge.