Métodos Numéricos
IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR
Ejercicio Examen del 17 de Diciembre de 2010

Ejercicio 1.

i) Definir orden de convergencia de una sucesión $\{x_n\}$.

ii) Sea $g(x) = x$ una ecuación, con α punto fijo de $g(\cdot)$. Asumiendo $g(\cdot)$ continua y con $p \geq 1$ derivadas continuas en un entorno de α, y además que $\frac{d^k g}{dx^k}(\alpha) = 0$, $\forall k \in 1...p-1$, $\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha) \neq 0$, demostrar que el orden de convergencia del MIG es p, con constante $\beta = \frac{1}{p!}\left|\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha)\right|$.

iii) Deducir el Método de Netwon-Raphson para resolver una ecuación $f(x) = 0$, con $f : A \subset R \rightarrow R$.

iv) Sea $f(x)$ con derivada segunda continua en un entorno de la raíz α y tal que $f'(\alpha) \neq 0$. Demostrar que la sucesión generada por Newton-Raphson converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo, y además la convergencia es cuadrática con constante $\beta = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.

Ejercicio 2.

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados:

$$\text{(PMC)}\ min_x \|b - Ax\|_2,$$

con $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, con $m > n$.
Se pide:

a) Deduzca la Ecuaciones Normales correspondiente al PMC.

b) i) ¿Qué es la descomposición QR de una matriz $A \in R^{m\times n}$?.
   ii) Explique cómo se puede utilizar la descomposición QR para resolver el PMC.

c) i) ¿Qué es la descomposición SVD (descomposición en valores singulares) de una matriz $A \in R^{m\times n}$?.
   ii) Explique cómo se puede utilizar la descomposición SVD para resolver el PMC.

Ejercicio 3.

Dado el sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ y + z &= 1 \\ -y + z &= 1 \end{aligned}$$

i) Plantee el método de Jacobi para resolver el sistema anterior en forma iterativa. Haga 3 iteraciones del método partiendo del punto $(0, 0, 1)$.

ii) Hallar la matriz de iteración J del método de Jacobi del problema anterior. Calcular el radio espectral de J y probar que el método no converge para cualquier elección del punto inicial.

iii) Escriba el método de Gauss-Seidel para el sistema. Calcule la matriz de iteración G para este método y halle su radio espectral. ¿Es este método convergente?.

iv) Escriba el método de Sobrerelajación (SOR) para el sistema. Si $w = \frac{3}{2}$, ¿está garantizada la convergencia del método?.