Métodos Numéricos
IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR
Solución Examen del 29 de Julio de 2010

Ejercicio 1.

1) Ver Teórico.

2) Ver Teórico.

3) A partir de las hipótesis: $A = L+D+U$ con $L = 0$, $D = I$ y U una matriz triangular superior arbitraria.

   Por lo tanto:

   $Q_{gs} = -(L+D)^{-1}U = -D^{-1}U = -IU = -U$

   $Q_j = -D^{-1}(L+U) = -D^{-1}U = -IU = -U$

   Para la convergencia, estudiemos el radio espectral de Q_{gs}.

   Para hallar los valores propios resolvemos:

   $\det(-U - \lambda Id) = 0 = (-1)^n \lambda^n$

   Con lo cual, $\lambda = 0$ y por lo tanto $\rho(Q_{gs}) < 1$ y es convergente.

4) La solución exacta es $x = (5/6, 2/3, -1/3)^T$.

   La matriz y el vector de iteración de Gauss-Seidel son:

$$Q_{gs} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5/8 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/8 \end{pmatrix}$$

   Las iteraciones y sus errores (en norma-2) son:

   $x_0 = (0, 0, 0)^T$, $e_0 = 1.118$

   $x_1 = (.5, .5, -.125)^T$, $e_0 = .427$

   $x_2 = (.625, .562, -.203)^T$, $e_0 = .267$

   $x_3 = (.703, .601, -.252)^T$, $e_0 = .167$

Ejercicio 2.

(32pts)

1) Ver Teórico.
2) Ver Teórico.
3) Los tres métodos propuestos son iterativos de orden 1: $x_{n+1} = g_i(x_n)$. Todos tienen como punto fijo a la raíz de f. A efectos de determinar el método más conveniente, se calcula $|g_i^{'}(\alpha)|$, en cada caso. Se descarta el primero, pues $|g_1^{'}(\alpha)| > 1$, y no se asegura la convergencia. Para el método 2: $|g_2^{'}(\alpha)| = e^{-\alpha} = \alpha$, mientras que en el tercero $|g_3^{'}(\alpha)| = |1 - e^{-\alpha}|/2 = |1 - \alpha|/2$. La magnitud de $|g^{'}(\alpha)|$ es menor en el método 3, que asegura un mejor factor de contracción. Este es el método más conveniente.
4) El método de Newton Raphson asegura en este caso convergencia cuadrática, pues $f^{'}(\alpha)$ no se anula, siendo más eficiente que los anteriores. Para este caso genera la siguiente iteración:

$$x_{n+1} = x_n - x_n(x_n + ln(x_n))/(x_n + 1) = x_n(1 + ln(x_n))/(1 + x_n)$$

Ejercicio 3.

(34pts)

1) Ver Teórico.
2)
   i) Ver Teórico.
   ii) Ver Teórico.
   iii) Ver Teórico.
3)
   i)

$$y' = -yt$$

$$\frac{y'}{y} = -t$$

$$\ln(y)' = -t$$

Integrando entre 0 y t.

$$\ln(y(t)) - \ln(1) = -1/2t^2$$

$$y(t) = e^{-1/2t^2}$$

$$y(1) = e^{-.5} = .6065$$

ii)

i	ti	y*i	f(y*i,ti)
0	0	1	0
1	.25	1	-.25
2	.50	.9375	-.46875
3	.75	.8203	-.61523
4	1	.6665	

El error absoluto vale: $e_i = .06$

iii)

i	ti	y*i	f(y*i,ti)
0	0	1	0
1	.125	1	-.125
2	.25	.9844	-.24609
3	.375	.9536	-.3576
4	.5	.9089	-.45446
5	.625	.8521	-53257
6	.75	.7855	-.58915
7	.875	.7119	-.6229
8	1	.6340	

El error absoluto vale: $e_{ii} = .03$.

Comparemos los errores obtenidos: $e_{ii}/e_i = .06/.03 = 2$ y $h_{ii}/h_i = .25/.125 = 2$. Por lo tanto el orden de convergencia empirico es 1 y concuerda con lo deducido.

iv) De acuerdo con las definiciones de 1):

$x = e^{-.5}$, $T(.25) = .6665$, $T(.125) = .6340$, $q = .5$ y $p_1 = 1$.

A partir de la extrapolación de Richardson:

$R(.25) = \frac{.6665 \cdot .5^1 - .6340}{.5^1 - 1} = .6015$

El error absoluto vale: $e_{iv} = .005$

El error, para $h = .25$, a partir de la extrapolación de richardson es un orden menor. Es coherente con lo deducido.

v) Buscamos h^* tal que el error con Euler hacia adelante sea $e^* = .005$.

Por lo tanto $e^*/e_{ii} = h^*/h_{ii}$

Con lo cual: $h^* = h_{ii}e^*/e_{ii} = .125\frac{.005}{.03} = .0208$.

El número de pasos será entonces: $n^* = 1/.0208 = 48$.

Obtener un error de .005 sólo con Euler hacia Adelante cuesta 48 iteraciónes. Mientras que con Euler hacia Adelante y la extrapolación de Richardson cuesta $4 + 8 = 12$ iteraciones de Euler hacia adelante y una extrapolación de Richardson. Siendo ésta segunda opción mucho más económica.