Métodos Numéricos
IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR
Examen del 29 de Julio de 2010

Ejercicio 1.

(34pts)
Dado un método iterativo, de la forma:

$$x_{k+1} = Qx_k + r$$

Con $x_k \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathcal{M}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{R}^n$.

1) Demuestre que $\{x_k\}$ es convergente $\Leftrightarrow \rho(Q) < 1$.
Asuma que Q es diagonalizable.
2) Deduzca las expresiones de Q y r del método de Gauss-Seidel, para un sistema lineal $(n \times n)$ de la forma $Ax = b$.
3) Demuestre que si A es simétrica y definida positiva, entonces el Método de Gauss-Seidel es convergente.
4) Realice 3 iteraciones de Gauss-Seidel ($x_0^T = [0, 0, 0]$) y compare la sucesión generada contra la solución exacta para el siguiente sistema lineal:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.

(32pts)

1) Deduzca el método de Newton-Raphson para hallar raíces de una función $f(x) = 0$.
2) Demuestre que el método de Newton-Raphson converge al menos cuadráticamente, enunciando hipótesis apropiadas.
3) Se desea resolver la ecuación $x + ln(x) = 0$, conociendo que $x_0 = 0{,}5$ es próximo a su solución. A tales efectos, se proponen los siguientes tres métodos:

$$x_{k+1} = -\ln(x_k)$$
$$x_{k+1} = e^{-x_k}$$
$$x_{k+1} = \frac{x_k + e^{-x_k}}{2}$$

Indique cuál de los métodos es más conveniente. Justificar.
4) Proponga un método más eficiente que los anteriores.

Ejercicio 3.

(34pts)

1) Sea $x \in \mathbb{R}$ y $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(h) = x + a_0 h^{p_1} + O(h^{p_2})$, con $1 \leq p_1 < p_2$. Deduzca la Fórmula de Extrapolación de Richardson $R(h)$, la cual cumple: $R(h) - x = O(h^{p_2})$

2) Dada la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y(t)' &= f(y(t), t) \end{aligned}$$

   i) Deduzca el método de Euler hacia adelante para un paso temporal (h) constante.

   ii) Deduzca el orden del Error Local del método de la parte (i) en función de h.

   iii) A partir del resultado de la parte 2)ii), deduzca el orden de Error Global del método en función de h. (En esta parte no será necesario probar el teorema necesario para deducir el orden).

3) Sea $f(y(t), t) = -y(t)t$, $y_0 = 1$:

   i) Resuelva analíticamente la ecuación diferencial, halle $y(1)$.

   ii) Halle $y(1)$ usando el método de Euler hacia adelante con paso $h = 0{,}25$, y su error absoluto.

   iii) Halle $y(1)$ usando el método de Euler hacia adelante con paso $h = 0{,}125$, y su error absoluto. ¿Es coherente con la parte 2)iii)?. Justifique.

   iv) Use la extrapolación de Richardson para mejorar su aproximación de $y(1)$, y halle el error absoluto. ¿Es coherente con la parte 1)?. Justifique.

   v) Calcule (aproximadamente) el número de pasos necesarios de Euler Hacia Adelante para lograr el mismo error que el logrado en la parte 3)iv). ¿Cuál de los métodos resulta más económico?. Justifique.