Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Solución Examen Marzo 2010

Ejercicio 1.

i) Ver teórico.

ii) Ver teórico.

iii) Ver teórico.

iv) a) Como $\|5\| > \|-1\| + \|-3\|$, $\|-3\| > \|1\| + \|0\|$ y $\|-2\| > \|0\| + \|1\|$, se verifica que la matriz A es diagonal dominante por filas. Entonces, por la parte iii) el método de Jacobi converge.

b) La solución exacta es $x = (-0{,}32; -0{,}44; -0{,}72)^T$

c) El método de Jacobi: $x_{k+1} = Qx_k + r$ con: $Q = -D^{-1}(L+U)$ y $r = D^{-1}b$.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,333 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$L + U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,6 \\ 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = (0,2; -0,333; -0,5)^T$$

Con lo cual:

$x_0 = (0;0;0)^T$, $\|x - x_0\| = 0,90$
$x_1 = (0,2; -0,333; -0,5)^T$, $\|x - x_1\| = 0,57$
$x_2 = (-0,167; -0,267; -0,667)^T$, $\|x - x_2\| = 0,24$
$x_3 = (-0,253; -0,389; -0,633)^T$, $\|x - x_3\| = 0,12$

Ejercicio 2.

i) Si $\alpha = \text{lím}_{n\to\infty} x_n$, entonces x_n converge a α con orden $p \in R$ si se cumple que:

$$lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = l > 0 \ .$$

ii) a) Sea $g : [a, b] \to R$ con derivada continua en (a, b), tal que $g(\alpha) = \alpha$ y $|g^{'}(\alpha)| < 1$, donde $\alpha \in (a, b)$. Entonces, existe $k : |g^{'}(\alpha)| < k < 1$. Sea $x_0 \in I_k$, donde I_k es el intervalo que contiene a α y tal que la derivada de g no excede en magnitud a k. Si definimos la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$, probemos las siguientes afirmaciones:

1) Cerradura: $x_n \in I_k, \forall n \in N$
2) Contracción en I_k: $|x_{n+1} - \alpha| \leq k|x_n - \alpha|, \forall n \in N$
3) Convergencia: $x_n \to \alpha$
Demostración:

1) Por inducción. El paso base es evidente, pues $x_0 \in I_k$ por definición. Si admitimos que $x_h \in I_k$, entonces tenemos que $x_{h+1} - \alpha = g(x_h) - g(\alpha) = g^{'}(\epsilon)(x_h - \alpha) < x_h - \alpha$, donde se usó el Teorema del Valor Medio de Lagrange, y definiciones (obsérvese que I_k es un intervalo, luego $\epsilon \in (x_h, \alpha) \subset I_k$). Este esquema inductivo completa la prueba.
2) $|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| = |g^{'}(\epsilon)||(x_n - \alpha)| \leq k|x_n - \alpha|, \forall n \in N$, donde se ha utilizado que $|g^{'}(\epsilon)| \leq k$ pues $\epsilon \in (x_n, x_{n+1}) \subset I_k$, último válido por la Propiedad de Ceradura.
3) Por la Propiedad de Contracción se prueba directamente que $|x_h - \alpha| \leq k^h|x_0 - \alpha|$. Tomando límites se demuestra la convergencia.

b) Análogamente, si $|f^{'}(\alpha)| > 1$, se demuestra que existe $k > 1$ tal que $|x_{n+1} - \alpha| > k|x_n - \alpha|$, $\forall n \in N$, por lo que la secuencia no converge.

iii) Deseamos hallar la raíz α de $f : f^{'}(\alpha) \neq 0$, donde f tiene derivada segunda continua y $f^{''}(\alpha) \neq 0$. El método de Newton y Raphson consiste en la siguiente iteración:

$$x_0 \in R$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n) \ .$$

Es directo probar que en estas condiciones se tiene que $\alpha = g(\alpha)$ y también que $g^{'}(\alpha) = 0$. La convergencia se asegura entonces de la parte (b). Aplicando un desarrollo de Taylor a la función g tenemos que:

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g^{'}(\alpha)(x_n - \alpha) + g^{''}(\epsilon)\frac{(x_n - \alpha)^2}{2} \ .$$

Si $e_n = x_n - \alpha$ es el error en el paso n, tomando límite con n en la expresión anterior tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{g^{''}(\alpha)}{2} = \frac{f^{''}(\alpha)}{2f'(\alpha)} = \beta \ ,$$

entonces, bajo estas condiciones el método de Newton y Raphson es de orden cuadrático y velocidad β, como se quería demostrar.

Ejercicio 3.

i) Ver teorico.

ii) Planteamos el sistema a resolver:

$$\begin{array}{rcl} x_1^2 & = & x_2 \\ x_2^2 & = & x_1 \\ x_3^2 & = & x_2 \end{array}$$

entonces usando las dos primeras ecuaciones llegamos a que $x_1^4 = x_1$. Si $x_1 = 0$ por la primer ecuacion x_2 tambien, y lo mismo para x_3 por la tercer ecuacion. Si no, $x_1^3 = x_1$ y $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ por la primer ecuacion, y por la tercer ecuacion x_3 es 1 o -1.

Por lo tanto las soluciones exactas del sistema son $(0,0,0), (1,1,1), (1,1,-1)$.

iii) Empezamos la iteracion con el vector $X_0 = (1, 0{,}75, 1)$.

- $f(X_0) = h = (0{,}25, -0{,}4375, 0{,}25)$

  $$f_i(X_0 + e_j h_j) = \begin{pmatrix} 0{,}81250 & 0{,}68750 & 0{,}25000 \\ -0{,}68750 & -0{,}90234 & -0{,}43750 \\ 0{,}25000 & 0{,}68750 & 0{,}81250 \end{pmatrix}$$

  $$Jf(X_0) = \begin{pmatrix} 2{,}2500 & -1{,}0000 & 0{,}00000 \\ -1{,}0000 & 1{,}0625 & 0{,}00000 \\ 0{,}00000 & -1{,}0000 & 2{,}2500 \end{pmatrix}$$

  $$Jf^{-1}(X_0) = \begin{pmatrix} 0{,}76405 & 0{,}71910 & 0{,}00000 \\ 0{,}71910 & 1{,}6180 & 0{,}00000 \\ 0{,}31960 & 0{,}71910 & 0{,}44444 \end{pmatrix}$$

  Entonces, $X_1 = X_0 - Jf^{-1}(X_0)f(X_0) = (1{,}1236, 1{,}2781, 1{,}1236)$

- $f(X_1) = h = (-0{,}015621, 0{,}50992, -0{,}015621)$

  $$f_i(X_1 + e_j h_j) = \begin{pmatrix} -0{,}050482 & -0{,}52554 & -0{,}015621 \\ 0{,}52554 & 2{,}0734 & 0{,}50992 \\ -0{,}015621 & -0{,}52554 & -0{,}050482 \end{pmatrix}$$

  $$Jf(X_1) = \begin{pmatrix} 2{,}2316 & -1{,}0000 & 0{,}00000 \\ -1{,}0000 & 3{,}0661 & 0{,}00000 \\ 0{,}00000 & -1{,}0000 & 2{,}2316 \end{pmatrix}$$

  $$Jf^{-1}(X_1) = \begin{pmatrix} 0{,}52480 & 0{,}17116 & 0{,}00000 \\ 0{,}17116 & 0{,}38197 & 0{,}00000 \\ 0{,}076699 & 0{,}17116 & 0{,}44810 \end{pmatrix}$$

  $X_2 = X_1 - Jf^{-1}(X_1)f(X_1) = (1{,}0445, 1{,}0860, 1{,}0445)$

- $f(X_2) = h = (0{,}0050240, 0{,}13486, 0{,}0050240)$

$$f_i(X_2 + e_j h_j) = \begin{pmatrix} 0{,}015545 & -0{,}12983 & 0{,}0050240 \\ 0{,}12983 & 0{,}44595 & 0{,}13486 \\ 0{,}0050240 & -0{,}12983 & 0{,}015545 \end{pmatrix}$$

$$Jf(X_2) = \begin{pmatrix} 2{,}0942 & -1{,}0000 & 0{,}00000 \\ -1{,}0000 & 2{,}3068 & 0{,}00000 \\ 0{,}00000 & -1{,}0000 & 2{,}0942 \end{pmatrix}$$

$$Jf^{-1}(X_2) = \begin{pmatrix} 0{,}60217 & 0{,}26104 & 0{,}00000 \\ 0{,}26104 & 0{,}54665 & 0{,}00000 \\ 0{,}12465 & 0{,}26104 & 0{,}47752 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = X_2 - Jf^{-1}(X_2) f(X_2) = (1{,}0063, 1{,}0110, 1{,}0063)$$

iv) Una modificacion puede ser evaluar $Jf(X)$ ocasionalmente, o sea

$$Jf(X_p)(X_{k+1} - X_k) = -f(X_k), \quad k = p, p+1, \cdots, p+m$$

donde p, m pueden variar.

Este metodo tiene la ventaja de que no tenemos que evaluar las n^2 derivadas parciales de f en todos los pasos. Otra ventaja es podemos hacer la descomposíción LU de la matriz jacobiana, guardarla y solamente hacer sustituciones hacia adelante y atrás en cada paso en el que la matriz Jacobiana no se actualice.