Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Examen del 23 de Febrero de 2010

Ejercicio 1.

Dado un método iterativo, de la forma:

$$x_{k+1} = Qx_k + r$$

Con $x_k \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathcal{M}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{R}^n$.

i) Demuestre que $\{x_k\}$ es convergente $\Leftrightarrow \rho\left(Q\right) < 1$.
Asuma que Q es diagonalizable.

ii) Deduzca las expresiones de Q y r del método de Jacobi, para un sistema lineal $(n\times n)$ de la forma $Ax = b$.

iii) Demuestre que si A es diagonal dominante por filas, entonces el método de Jacobi converge.

iv) Asegure la convergencia, realice 3 iteraciones de Jacobi ($x_0^T = [0,0,0]$) y compare la sucesión generada contra la solución exacta para el siguiente sistema lineal:
$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.

i) Definir orden de convergencia de una sucesión $\{x_n\}$.

ii) Sea $g : [a,b] \to R$ con derivada continua y $\alpha \in (a,b)$ un punto fijo de g.
Demostrar que para el Método Iterativo General $x_{k+1} = g(x_k)$:

   a) Si $|g'(\alpha)| < 1$, la iteración MIG converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo. Y además se cumple que: $|\alpha - x_{n+1}| \leq k \cdot |\alpha - x_n|$, $n = 0, 1, ...$ Con $k \in (0,1)$.

   b) Si $|g'(\alpha)| > 1$ la iteración MIG no converge a α.

iii) Sea $f(x)$ con derivada segunda continua en un entorno de la raíz α y tal que $f'(\alpha) \neq 0$. Demostrar que la sucesión generada por Newton-Raphson converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo, y además la convergencia es cuadrática con constante $\beta = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.

Ejercicio 3.

i) Sea $\alpha \in R^n$ la raíz de un Sistema No Lineal $f(X) = 0$ de n ecuaciones con n incógnitas. Describir el Método de Newton-Raphson para Sistemas, asumiendo f diferenciable en los puntos X_i.

ii) Sea $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2, x_2^2 - x_1, x_3^2 - x_2)$. Hallar las soluciones exactas analíticamente.

iii) Supongamos que al computar la matriz jacobiana de f en el punto X_k se asume:

$$\frac{df_i(X_k)}{dx_j} \approx \frac{f_i(X_k + h_j\vec{e}_j) - f_i(X_k)}{h_j},$$

donde $\vec{e}_j$ es el vector canónico con un 1 en la j-ésima posición. En el Método de Steffensen se toma $h_j = f_j(X_k)$.
Para la función definida en (ii) calcular X_3 partiendo de $X_0 = (1, 0{,}75, 1)$ aplicando el Método de Steffensen para estimar la matriz jacobiana en cada punto.

iv) Si se sabe que la matriz jacobiana de f varía poco respecto a su evaluación en los puntos X_k. Plantee una variante del Método de Newton-Raphson que sea adecuado en dichas situaciones, y comente las ventajas que tendría respecto al método original.