Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Solución del Examen del 30 de Enero de 2010

Ejercicio 1.

i) Ver teórico.

ii) Ver teórico.

iii) Ver página siguiente

Ejercicio 1) iv)

Datos

t	y
0	0
1	1
2	-2
3	3

k	xk	F(xk)	J(xk)		J'(xk)*J(xk)		Y-F(xk)	J'(xk)*(Y-F(xk))	pk	||r(xk)||
0	1	1,000	1,000	0,000	466,416	1326,872	-1,000	-418,219	-1,481	19,60
	1	2,718	2,718	2,718	1326,872	3856,641	-1,718	-1172,940	0,205	
		7,389	7,389	14,778			-9,389			
		20,086	20,086	60,257			-17,086			
1	-0,48076	-0,481	1,000	0,000	1519,140	-2554,336	0,481	822,966	0,102	21,31
	1,20532	-1,605	3,338	-1,934	-2554,336	4349,683	2,605	-1398,086	-0,262	
		-5,356	11,141	-12,912			3,356			
		-17,878	37,187	-64,647			20,878			
2	-0,37902	-0,379	1,000	0,000	338,871	-342,221	0,379	168,689	-0,128	9,65
	0,943647	-0,974	2,569	-0,919	-342,221	354,358	1,974	-175,781	-0,620	
		-2,502	6,601	-4,722			0,502			
		-6,429	16,961	-18,199			9,429			
3	-0,50689									
	0,324101									

Ejercicio 2.

i) Llamando al interpolante $p_2(x)$,

$$p_2(x) = \sum_{i=1}^{3} l_i(x) z_i$$

Con:

$$l_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$
$$l_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

ii) Integrando de los dos lados de la ecuación diferencial tenemos:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y) dt$$

En el lado derecho aproximamos la integral (I) sustituyando $f(t, y)$ por el interpolante sugerido.

En el lado izquierdo al aproximar la integral nos queda: $y_{k+1} - y_k$.

La integral (I) la podemos escribir como:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=1}^{3} L_i(t) Z_i dt = \sum_{i=1}^{3} Z_i \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_i(t) dt = \sum_{i=1}^{3} Z_i C_i$$

Con: $Z_1 = f(t_{k-2}, y_{k-2})$, $Z_2 = f(t_{k-1}, y_{k-1})$, $Z_3 = f(t_k, y_k)$.

$$L_1(t) = \frac{(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-2} - t_k)}$$
$$L_2(t) = \frac{(t - t_{k-2})(t - t_k)}{(t_{k-1} - t_{k-2})(t_{k-1} - t_k)}$$
$$L_3(t) = \frac{(t - t_{k-2})(t - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1})}$$

Con lo cual, haciendo el cambio de variable $w = t - t_k$ y usando el hecho que los t_i están equi-espaciados, las integrales C_i resultan:

$$C_1 = \frac{1}{2h^2} \int_0^h (w + h) w dw = \frac{5}{12} h$$
$$C_2 = -\frac{1}{h^2} \int_0^h (w + 2h) w dw = -\frac{4}{3} h$$
$$C_3 = \frac{1}{2h^2} \int_0^h (w + 2h)(w + h) dw = \frac{23}{12} h$$

Finalmente el método multipaso tiene la siguiente expresión:

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{5}{12}f(y_{k-2}, t_{k-2}) - \frac{4}{3}f(y_{k-1}, t_{k-1}) + \frac{23}{12}f(y_k, t_k)\right)$$

iii) Para $k = 1$ y $k = 2$ calculamos la solución con Euler Hacia Adelante, luego usamos el método multipaso de la parte anterior.

k	t_k	y_k	$f(y_k, t_k)$
0	1	1	1
1	1.1	1.1000	1.2906
2	1.2	1.2291	1.6125
3	1.3	1.3596	1.9144
4	1.4	1.5022	2.2138
5	1.5	1.6600	2.5137
6	1.6	1.8346	2.8136
7	1.7	2.0274	3.1135
8	1.8	2.2406	3.4135
9	1.9	2.4762	3.7134
10	2.0	2.7365	

Ejercicio 3.

i) Ver teórico.

ii) Ver teórico.

iii) Ver teórico.

iv) El paso iterativo del Método del Trapecio se escribe:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right)$$

Usando la f dada:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(2t_k^2 y_k + 2t_{k+1}^2 y_{k+1}\right)$$

Despejando y_{k+1} y usando $t_{k+1} = t_k + h$:

$$y_{k+1} = y_k \frac{1 + ht_k^2}{1 - h(t_k + h)^2}$$