Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Examen del 30 de Enero de 2010

Ejercicio 1.

i) Defina el Algoritmo de Gauss-Newton para solucionar el problema de Mínimos Cuadrados No Lineales.

ii) Dar expresiones explícitas para el vector de paso p_k solución de cada iteración de Mínimos Cuadrados Lineal correspondiente al método de Gauss-Newton, en los casos:

- $rango(J(x_k)) = n$,
- $rango(J(x_k)) < n$, (en éste caso el paso de Gauss-Newton no es único y se toma aquella solución de norma mínima aplicando adecuadamente la descomposición SVD a $J(\cdot)$),

Con $J(\cdot) \in R^{m\times n}$, siendo ésta la matriz jacobiana del residuo $r(x)$.

iii) Suponga que tenemos los siguientes datos:

$$\{(0,0),(1,1),(2,-2),(3,3)\}$$

y que queremos aproximarlos por una función del tipo $f(x,\beta_1,\beta_2) = \beta_1 e^{x\beta_2}$ con mínimos cuadrados. Compute las primeras tres iteraciones del algoritmo de Gauss-Newton con dato inicial $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Ejercicio 2.

i) Encuentre, usando los polinomios de Lagrange, el interpolante de menor grado de los puntos:

$$(x_1,z_1);(x_2,z_2);(x_3,z_3)$$

ii) Se busca deducir un método multipaso explícito para resolver una EDO de la forma:

$$y' = f(y,t)$$

Se utilizará la solución en los puntos t_k, t_{k-1}, t_{k-2} para hallar la solución en t_{k+1}. Para ello integre la EDO respecto del tiempo entre t_k y t_{k+1} y aproxime $f(y,t)$ por el interpolante (Parte i) de los siguientes puntos:

$$(t_{k-2},f(y_{k-2},t_{k-2}));(t_{k-1},f(y_{k-1},t_{k-1}));(t_k,f(y_k,t_k))$$

Suponga que $t_i - tj = (i-j)*h$ siendo h un valor arbitrario.

iii) Resuelva, usando el método anterior y Euler Hacia Adelante, la EDO con $f(y,t) = Ln(y^2)+t$, condición inicial $y(1)=1$, entre $t=1$ y $t=2$ con incrementos $h=0{,}1$.

Use el siguiente formato:

k	t_k	y_k	$f(y_k,t_k)$

Ejercicio 3.

Dada la EDO:

$$\begin{aligned} y' &= f(y,t),\ t \in [a,b] \\ y(t_0) &= c. \end{aligned}$$

i) Deducir el Método de Euler "Hacia Adelante", y determinar su región de estabilidad por medio del Problema Test.

ii) Deducir el Método de Euler "Hacia Atrás", y determinar su región de estabilidad por medio del Problema Test. Teniendo en cuenta que es un método implícito, describir cómo se aplica el método a una EDO no lineal (f es no lineal).

iii) Considerando que el Método del Trapecio es un método implícito, describir como se aplica el método si f es una función no lineal.

iv) Sea $f(y,t) = 2t^2 y$. De una expresión explícita para el punto y_{n+1} aplicando el Método del Trapecio.