Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Examen del 8 de Diciembre de 2009

Ejercicio 1.

[Total 33 puntos. Puntajes por parte: 6, 6, 13, 8].

Se desea hallar la raíz x^* de la función $f(x)$.

1) Defina la iteración de Newton.

2) Defina el orden de convergencia de un método iterativo.

3) Supóngase que $f'(x^*) \neq 0$ y $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in R$. Demuestre que en estas condiciones y asumiendo convergencia, el método iterativo de Newton es de orden 2.

4) Diseñe una iteración de Newton para estimar la raíz cúbica de 9, de forma que se asegure convergencia cuadrática. Halle los primeros 3 pasos de la iteración, iniciando con $x^{(0)} = 2$.

Ejercicio 2.

[Total 34 puntos. Puntajes por parte: 8, 8, 10, 8].

Consideremos la iteración de Richardson: $x^{(k+1)} = (I - wA)x^{(k)} + wb$, donde A es una matriz real con autovalores en $[\alpha, \beta]$, y $\beta > \alpha > 0$.

1) Pruebe que el error cometido al resolver el sistema $Ax = b$ mediante esta iteración en el paso k cumple: $e^{k+1} = (I - wA)e^k$.

2) Si elegimos $w = \frac{2}{\alpha+\beta}$, probar que el radio espectral de la matriz $(I - wA)$ es $\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}$.
SUGERENCIA: Si λ es valor propio de A, entonces $1 - w\lambda$ es valor propio de $I - wA$.

3) Demuestre que si A es además diagonalizable, existe un real w tal que la iteración de Richardson converge para cualquier valor inical x^0.

4) ¿Para qué matriz usted espera mayor velocidad de convergencia: A_1 con autovalores en $[10, 20]$ o A_2 con autovalores en $[1010, 1020]$? Explique.

Ejercicio 3.

[Total 33 puntos. Puntajes por parte: 11, 11 (item i 3, item ii 8), 11 (item i 3, item ii 8)].

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados:

$$\text{(PMC)}\ min_x \|b - Ax\|_2,$$

con $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, con $m > n$. Se pide:

1) Deduzca la Ecuaciones Normales correspondiente al PMC.

2) i) ¿Qué es la descomposición QR de una matriz $A \in R^{m\times n}$?.

ii) Explique cómo se puede utilizar la descomposición QR para resolver el PMC.

3) i) ¿Qué es la descomposición SVD (descomposición en valores singulares) de una matriz $A \in R^{m \times n}$?.

ii) Asumiendo conocida la descomposición SVD de la matriz A, brinde una expresión para la única solución del problema PMC, para la cual $\|x\|_2$ es mínima.

1. Solución

PROBLEMA 1

1) El método de Newton se obtiene a partir del desarrollo de Taylor de primer orden (o equivalentemente, tomando el corte con el eje x y la recta tangente de un punto inicial x^0):

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + (x^{k+1} - x^k)f^{'}(x^k) \approx 0 \rightarrow x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f^{'}(x^k)}, \quad x^0 \in R.$$

2) Sea $e_k = x^k - x^*$ el error de la iteración en el paso k. Si la sucesión $\left\{x^k\right\}_{k \in N}$ converge a x^*, se define el orden de convergencia como el máximo número real p tal que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = l > 0.$$

3) Definamos $g(x) = x - \frac{f(x)}{f^{'}(x)}$. A partir de la definición del error y un desarrollo de Taylor de orden 2:

$$e_{k+1} = x^{k+1} - x^* = g(x^k) - g(x^*) = g^{'}(x^*)e_k + \frac{g^{''}(\epsilon)}{2!}e_k^2$$

Un cálculo directo muestra que $g^{'}(x^*) = \frac{f(x^*)f^{''}(x^*)}{(f^{'}(x^*)^2} = 0$. Luego:

$$e_{k+1} = \frac{g^{(2)}(\epsilon)}{2}e_k^2$$

En conclusión, la iteración es de orden 2, como se quería demostrar.

4) La raíz cúbica de 9 es raíz de la función $f(x) = x^3 - 9$. Denotando $x^{k+1} = g(x^k)$ la iteración de Newton, entonces:

$$x^0 \in R$$
$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^3 - 9}{3x^2}$$

Aplicando el método de Newton con $x^0 = 2$ resulta $x^1 = \frac{25}{12} \approx 2,083$, $x^2 \approx 2,080088$ y $x^3 \approx 2,080084$. El error e_3 es menor que 1^{-10}, y la convergencia es cuadrática.

PROBLEMA 2

1) Sea x^* la solución del sistema lineal Ax. Entonces:

$$e^{k+1} = x^{k+1} - x^* = (I - wA)x^k + wb - Ix^* + w(Ax^* - b) = (I - wA)(x^k - x^*) = (I - wA)e^k$$

2) Si v es un vector propio de $Iw - A$ entonces:

$$(I - wA)v = v - wAv = (1 - w\lambda)v,$$

donde $\lambda \in [\alpha, \beta]$ es valor propio de la matriz A. Dado que $\beta > \alpha > 0$, tomando $w > 0$ sabemos que $1 - w\lambda \in [1 - w\beta, 1 - w\alpha]$ Eligiendo $w = \frac{2}{\alpha+\beta}$ entonces $w \in [\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}$, donde w es un autovalor cualquiera de la matriz $I - wA$. Su radio espectral es entonces $\rho = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}$.

3) Tomando $w = \frac{2}{\alpha+\beta}$, por la parte anterior sabemos que el radio espectral es $\rho = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta} < 1$. La matriz A es diagonalizable, y el error en el paso inicial se puede escribir en términos de una base de vectores propios: $e^0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Obsérvese entonces que la norma del error se reduce en cada iteración, pues:

$$\left\|e^{k+1}\right\| = \left\|(I-wA)^{k+1}e^0\right\| = \left\|(I-wA)^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(w-\lambda_i)^{k+1}\left\|x_i\right\| \leq \rho^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left\|x_i\right\| \xrightarrow{k} 0.$$

Esto implica que la iteración de Richardson converge para cualquier punto inicial en las condiciones antes definidas.

4) La matriz A_1 tiene un radio espectral acotado por $(20-10)/(20+10) = 1/3$ mientras que la matriz A_2 por $1/203$. El factor de reducción del error global es mayor ante menores valores de radio espectral, por lo que se espera mayor velocidad de convergencia en la matriz A_2.

PROBLEMA 3

Ver teórico.