Soluciones examen Métodos Numéricos 1 / 8 / 09 (Sol. resumida)

1) a) $J = \begin{bmatrix} 0 & -(a+1)/6 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -(a-1)/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\|J\|_\infty$ = max{ |a+1|/6 + 1/2 ,1/2 , |a-1|/2 +1/2 }=max { |a+1|/6 + 1/2 , |a-1|/2 +1/2 }
Haciendo un dibujo se ve que el mínimo se da en a = ½

c) Si a = 1/2 , $\|J\|_\infty$ vale ¾ y por tanto el método resulta convergente.
Y converge a la solución del sistema que es $(2\ \ 0\ -1)^t$
El polinomio característico de J es $-\lambda^3 + 1/8$, con lo que el radio espectral vale ½.. Esto resulta coherente ya que el radio espectral es menor o igual que cualquier norma de la matriz de iteración y la norma infinito vale ¾

d) Matriz de iteración de Gauss Seidel = $\begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

El polinomio característico es $\lambda^2 (1/8 - \lambda)$, por lo que su radio espectral vale 1/8 y el método resulta ser convergente.

2) a) Poniendo los desarrollos de Taylor de $f(x_o - h)$ y $f(x_o + 2h)$ se obtienen la fórmulas :

$f'(x_o) = (-2/3\ f(x_o-h) + 1/2\ f(x_o) + 1/6\ f(x_o +2h) / h \ - (h^2 /3) f'''(c)$

$f''(x_o) = (2/3\ f(x_o-h) - f(x_o) + 1/3\ f(x_o +2h) / h^2 \ - (h /3) f'''(c')$

donde c , c' son abscisas del intervalo $[x_o - h , x_o + 2h]$

b) $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+4} = L\,|\,x+4\,|\ \Big|_0^1 = L(5/4)$ Como en [0,1] $x^n \le 1$ se tiene que

$I_n \le I_o$. $I_{n+1} + 4I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+4x^n}{x+4}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Restando miembro a miembro : $(I_{n+1} - \overline{I}_{n+1}) + 4(I_n - \overline{I}_n) = 0$

O sea $\varepsilon_{n+1} = -4\varepsilon_n \Rightarrow \varepsilon_n = (-4)^n \varepsilon_0$

Si n = 12 y $\varepsilon_0 \approx 10^{-6}$, resulta $\varepsilon_{12} \approx (4)^{12} 10^{-6} \approx 16.77$

Como I_{12} está en [0,1] el error anterior resulta inadmisible y el método se descarta

3) a) $\| C \|_{Fro}^2 = \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{i=1}^{i=p} |\, c_{i,j}\, |^2 = \sum_{j=1}^{j=q} \| C^{(j)} \|_2^2$

b) $\| AX - B \|_{Fro}^2 = \sum_{j=1}^{j=k} \| (AX-B)^{(j)} \|_2^2 = \sum_{j=1}^{j=k} \| AX^{(j)} - B^{(j)} \|_2^2$

c) $X = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 7/3 & 3 \end{bmatrix}$