Examen Métodos Numéricos 1/8/2009

N° Examen : Nombre :

1) Se considera el sistema :
$$\begin{aligned} 6x + (a+1)y + 3z &= 9 \\ 2x + 4y &= 4 \\ (a-1)x - y + 2z &= -3 \end{aligned}$$
donde a es un parámetro real

a) Plantee el método iterativo de Jacobi. Calcule la matriz de iteración J de este método.

b) Halle la función $\|J\|_\infty$ (que depende de a). Pruebe que para a = 1/2 se obtiene el mínimo de dicha función.

c) Para a = 1/2 : i) Determine si el método de Jacobi resulta convergente y en caso afirmativo a qué valor. ii) Calcule el radio espectral de J iii) Explique la coherencia entre los resultados de i) y de ii)

d) Para a = 1/2 : i) Plantee el método de Gauss Seidel ii) Halle la matriz de iteración del método de Gauss Seidel iii) ¿El método resulta ser convergente? Calcule el radio espectral de la matriz de iteración

2) a) Desarrollar una fórmula del tipo combinación lineal para que con los valores funcionales $f(x_0 - h)$, $f(x_0)$, $f(x_o + 2h)$ obtener la mejor aproximación posible a :

i) $f'(x_0)$

ii) $f''(x_0)$

En cada caso dar una expresión para el error de truncamiento de la fórmula.

b) Sea $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+4} dx$

i) Probar que $I_0 = L(5/4)$, que $0 \le I_n \le I_0$ y que se verifica $I_{n+1} + 4I_n = 1/(n+1)$

ii) Con la ecuación $I_{n+1} = -4I_n + 1/(n+1)$, $I_0 = L(5/4)$ se pretende calcular I_n

Sin embargo al representar en la máquina I_0 se almacena $\bar{I}_0 = I_0 - \varepsilon_0$

(con lo que se generará una sucesión $\bar{I}_n$ / $\bar{I}_{n+1} = -4\bar{I}_n + 1/(n+1)$)

Suponiendo que ese es el único error que se comete en el proceso, calcule el error ε_n en el paso n ($\varepsilon_n = I_n - \bar{I}_n$) en función de n y de ε_0

Si $\varepsilon_0 \approx 10^{-6}$ y n = 12 , estime ε_{12} . ¿ Qué opina de este método numérico para calcular I_{12} ?

3) Se define la norma de Frobenius de una matriz pxq C como $\|C\|_{Fro} = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=q} \sum_{i=1}^{i=p} |c_{i,j}|^2}$

a) Pruebe que $\|C\|^2_{Fro} = \sum_{j=1}^{j=q} \|C^{(j)}\|_2^2$, donde $C^{(j)}$ es la columna j de C y $\|\ .\ \|_2$ es la norma 2 de los vectores de R^p

b) Sean A una matriz mxn conocida con m > n , rango(A) = n y B una matriz mxk conocida.

Pruebe que la matriz X de dimensiones nxk que minimiza $\| AX - B \|_{Fro}$ es aquella tal que su columna j , $X^{(j)}$, minimiza $\| AX^{(j)} - B^{(j)} \|_2$, $\forall j = 1,2,\dots,k$

Por tanto la matriz X puede hallarse resolviendo k problemas de mínimos cuadrados lineales con la misma matriz A asociada. Si se usan ecuaciones normales, se pueden resolver en forma simultánea estos k problemas.

c) Si $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, halle la matriz 2x2 X que minimiza $\| AX - B \|_{Fro}$

Puntajes: 1) 33 : a) 5 b) 7 c) 10 : i) 3 ii) 5 iii) 2 d) 11 : i) 3 ii) 4 iii) 4
2) 34 : a) 18 : i) 9 ii) 9 b) 16 : a) 5 b) 11
3) 33 : a) 7 b) 11 c) 15