Solución examen de Métodos Numéricos **21 de Febrero 2009**

1) a) $[B^{-1} + \alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1})]A = [B^{-1} + \alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1})](B-uv^t) = B^{-1}B - B^{-1}uv^t +$
$+ \alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1})B - \alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1})(uv^t) = I - B^{-1}uv^t + \alpha(B^{-1}uv^t)(B^{-1}B) -$
$\alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1}u)v^t = I - B^{-1}uv^t + \alpha(B^{-1}uv^t) - \alpha(v^tB^{-1}u)\, B^{-1}uv^t =$
$I - B^{-1}uv^t(1 - \alpha + \alpha(v^tB^{-1}u)) = I - B^{-1}uv^t(1 - \alpha (1- (v^tB^{-1}u))) = I$

b) $uv^t = B - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} =$ (por ejemplo) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t$

$B^{-1}= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $B^{-1}u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $v^tB^{-1}u = 2$; $\alpha = -1$; $v^tB^{-1} = (0\ \ 0\ -1)$

$A^{-1} = B^{-1} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}(0\ \ 0\ -1) = B^{-1} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

c) i) Si $B = LU$ entonces trasponiendo $B^t = (LU)^t = U^tL^t$ donde U^t es matriz triangular inferior y L^t es matriz triangular superior. El sistema $B^tz = v$ se reduce a la resolución de dos sistemas triangulares : $U^ts = v$, $L^tz = s$

ii) $A^{-1} = B^{-1} + \alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1})$ con $\alpha = 1 / (1- v^tB^{-1}u)$
Con el resultado de 2) calculo v^ty y luego α
Con el resultado de 2) y 3) calculo la matriz $(B^{-1}u)(v^tB^{-1}) = yz^t$
$x = A^{-1}b = (B^{-1} + \alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1}))b = (B^{-1} + \alpha yz^t)b = B^{-1}b + \alpha yz^tb$ se obtiene sumando al resultado de 1) el vector αyz^tb. $x = w + \alpha yz^tb$

iii) Recordemos que resolver un sistema triangular nxn cuesta n^2 operaciones
1) cuesta dos sistemas triangulares : $2n^2$
2) idem : $2n^2$
3) (por lo dicho en i)) cuesta 2 sistemas triangulares : $2n^2$
Calculo de v^ty cuesta 2n-1 operaciones
Calculo de α cuesta 2 operaciones
Calculo de yz^t : Hay que calcular n^2 posiciones. Cada posición cuesta 1 operación. Resulta entonces n^2 operaciones
Calculo de αyz^tb : Conviene calcularlo como $yz^t(\alpha b)$. αb cuesta n operaciones. $yz^t(\alpha b)$ tiene n posiciones y cada posición cuesta 2n-1 ops. Quedaría n(2n-1)
O sea $n(2n-1) + n = 2n^2$ operaciones
Calculo de $x = w + \alpha yz^tb$: Cuesta n operaciones.
En total : $2n^2 + 2n^2 + 2n^2 + (2n-1) + 2 + n^2 + 2n^2 + n = 9n^2 + 3n + 1$ operaciones

iv) Resolver Ax=b por escalerización cuesta $O(n^3)$ operaciones, por lo cual en general (excepto n muy pequeños) es más eficiente usar el método anterior que requiere de $O(n^2)$ operaciones.

2) a) Se resolverá usando las ecuaciones normales.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$; $A^tA = \begin{bmatrix} 25555 & 2401 & 247 \\ 2401 & 247 & 31 \\ 247 & 31 & 7 \end{bmatrix}$; $A^ty = \begin{pmatrix} 10373.69 \\ 962.73 \\ 97.76 \end{pmatrix}$

Si $u = (a\ \ b\ \ c)^t$, hallamos el u óptimo resolviendo $(A^tA)u = A^ty$

Resulta u = (0.48353 -0.93198 1.03131)

La parábola óptima será entonces : $\varphi(x) = 0.48353x^2 -0.93198x + 1.03131$

b) Calculamos el vector

$\varphi(x_i) = (1.03131 \quad 0.58286 \quad 1.10147 \quad 2.58714 \quad 8.45966 \quad 24.52139 \quad 59.47587)$

$\| y - \varphi(x_i)\|_2 = 0.28427$

c) $\varphi(4.22) = 5.70925$

d) $\alpha(x_i) = (0 \quad 0.4002 \quad 1.6016 \quad 3.6054 \quad 10.025 \quad 25.7024 \quad 57.9456)$

$\| y - \alpha(x_i)\|_2 = 2.9412$

La parábola obtenida en a) ajusta mejor los datos que la función α ya que el residuo cuadrático de φ cuyo valor es 0.28427 es menor que el residuo cuadrático de α cuyo valor es de 2.9412 . Este chequeo hay que hacerlo ya que α no es un polinomio de segundo grado.

3) a) $x = -1 \pm \sqrt{1-10^{-p}}$ La solución $x = -1 - \sqrt{1-10^{-p}}$ es menor que -1

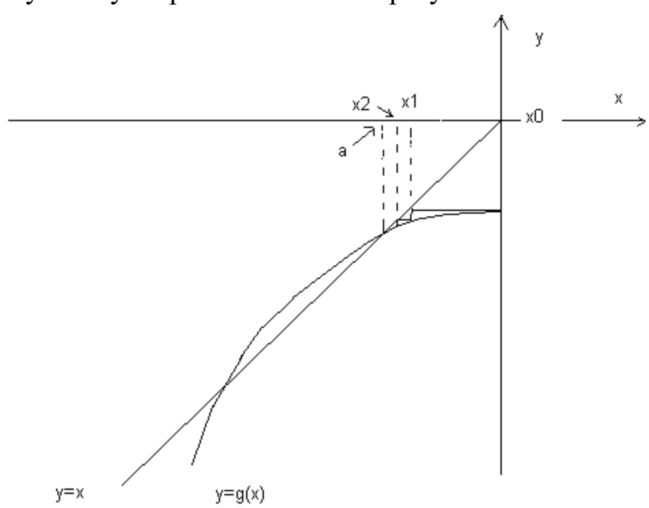
Trabajamos con la otra a la que llamaremos a .

$$a = \sqrt{1-10^{-p}} - 1 = \frac{(1-10^{-p})-1}{\sqrt{1-10^{-p}}+1} = \frac{-10^{-p}}{\sqrt{1-10^{-p}}+1}$$

Se tiene que $a < 0$ y en la última expresión el denominador es > 1. Por lo tanto $a \in [-10^{-p} , 0]$

b) i) $x_{n+1} = g(x_n)$ donde $g(x) = -(x^2 + 10^{-p}) / 2$, $x_o = 0$

Partiendo de $x_o = 0$ se genera una sucesión monótona decreciente a a como se puede visualizar en la siguiente representación gráfica (Recordar que si tenemos en abscisas x_n el valor de x_{n+1} en abscisas se puede obtener de la siguiente manera: trazamos la vertical por x_n , cortamos con el gráfico de g(x), trazamos la recta horizontal por el punto obtenido la cual cortamos con la recta y = x y al punto obtenido lo proyectamos sobre Ox)



ii) La velocidad de convergencia en un entorno de a viene dada por $|g'(a)|$

$g'(x) = -x$. Así que $|g'(a)| = -a < 10^{-p}$

Este número nos da idea de que el error relativo (y absoluto) se multiplica por este número (aprox.) en cada iteración.

Otra definición que se maneja es tomando $-\log_{10}$ del valor anterior , número con el cual cuanto más rápida sea la convergencia mayor es el valor de este número (en este caso sería > p)

iii) $a = \sqrt{1-\frac{1}{100}} - 1 = \sqrt{\frac{99}{100}} - 1 = \frac{3\sqrt{11}}{10} - 1 = -5.012562895 * 10^{-3}$

$x_{n+1} - a = g(x_n) - g(a) =$ (Lagrange) $g'(c)(x_n - a) = (-c)(x_n - a)$

Como $c \in [a , x_n]$ se tiene que $-c < -a$

Entonces: Error absoluto en $x_{n+1} < (-a)$* Error absoluto en x_n

$E_{n+1} < (-a)E_n$, $E_{n+1} < (-a)(-a)E_{n-1} = (-a)^2 E_{n-1} < \ldots\ldots\ldots\ldots < (-a)^{n+1} E_o$

Como $E_o = -a$ resulta $E_{n+1} < (-a)^{n+2}$, o bien $E_n < (-a)^{n+1}$
Precisión de la máquina del orden de 10^{-6} me determina que busque que el error relativo sea de ese orden. En un entorno de *a* que es alrededor de $-5*10^{-3}$ se buscaría entonces un error absoluto del orden de $5*10^{-3}*10^{-6}$
O sea $E_n < 5*10^{-9}$. Lo que se obtiene si imponemos $(-a)^{n+1} < 5*10^{-9}$
Para n = 3 se cumple lo anterior : $(-a)^4$ es aprox. $5^4*10^{-12} = 625*10^{-12} = 0.625*10^{-9}$