Examen de Métodos Numéricos 21 de Febrero 2009
Facultad de Ingeniería - IMERL – Udelar

N° Examen : **Nombre:**

1) Sea B matriz nxn invertible. Considere la matriz $A = B - uv^t$, donde u y v son vectores columna de n elementos.

a) Probar que vale la fórmula (Sherman-Morrison) : $A^{-1} = B^{-1} + \alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1})$
donde $\alpha = 1 / (1 - v^tB^{-1}u)$ (Se supone que $1 - v^tB^{-1}u \neq 0$)
(*Sug.*: Probar $[B^{-1} + \alpha(B^{-1}u)(v^tB^{-1})]A= I$)

b) Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Sea A como B excepto que su 3er columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Elija los vectores u y v para que $A = B - uv^t$ y use la formula anterior para hallar A^{-1}. Chequee el resultado obtenido.

c) Sea B matriz nxn invertible de la cual se dispone su descomposición LU.
Sea $A = B - uv^t$. Considere la siguiente metodología para resolver $Ax = b$:

1) Obtener $w = B^{-1}b$ resolviendo $Bw = b$
2) Obtener $y = B^{-1}u$ resolviendo $By = u$
3) Obtener $z^t = v^tB^{-1}$ resolviendo $B^tz = v$
4) Se calcula $x = A^{-1}b$ utilizando Sherman-Morrison

i) Explique porque 3) se puede realizar eficientemente usando la descomp. LU de B
ii) Explique claramente como integra en 4) los pasos anteriores
iii) Cuente (en función de n) el número de operaciones que insume esta forma de resolver $Ax = b$
iv) Compare con el costo operacional de resolver $Ax = b$ por escalerización. (no uso la información de la LU de B) ¿Cuál es más eficiente?

2) a) Dados los valores de x_i , y_i de la tabla, determinar los parámetros a, b, c que permiten el mejor ajuste (en el sentido de mínimos cuadrados) de estos datos por la parábola $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$

x	0	1	2	3	5	8	12
y	1.1	0.55	0.95	2.61	8.65	24.4	59.5

b) Calcule la norma 2 del vector residuo para los parámetros óptimos.
c) ¿Qué estimación daría para el valor de y en $x =$ 4.22 ?
d) Si se considera ahora la función $\alpha(x) = 0.0002x^3 + 0.4x^2$, ¿ es esta una mejor función de ajuste (en el sentido de mínimos cuadrados) del conjunto de datos? Fundamente su respuesta.

3) Sea la ecuación cuadrática : $x^2 +2x + 10^{-p} = 0$, con $p \geq 1$

a) Demuestre que la raíz más pequeña en valor absoluto se encuentre en el intervalo $[-10^{-p} , 0]$

b) Considere la iteración de punto fijo : $x_{n+1} = -\dfrac{x_n^2 + 10^{-p}}{2}$ con $x_0 = 0$

i) ¿ La iteración converge? (justifique con una prueba su respuesta)
ii) ¿Cuál es la velocidad de convergencia?
iii) Si p = 2 y la precisión de la máquina es del orden de 10^{-6} , determine una expresión analítica que permita obtener el número de iteraciones necesarias para llegar a esta exactitud (ignore los efectos de redondeo)

Puntajes: 1) 34 : a) 11 b) 10 c) 13 : i) 4 ii) 2 iii) 5 iv) 2
2) 33 : a) 12 b) 7 c) 5 d) 9
3) 33 : a) 10 b) 23 : i) 8 ii) 7 iii) 8