Solución examen de Métodos Numéricos 31 Enero 2009

1) a)

g	1	x-1/4	$(x-1/4)^2$	$(x-1/4)^2(x-1)$	$(x-1/4)^2(x-1)^2$
g(1/4)	1	0	0	0	0
g'(1/4)	0	1	0	0	0
g(1)	1	3/4	9/16	0	0
g'(1)	0	1	3/2	9/16	0
g(9/4)	1	2	4	5	25/4

Valor funcional en x = 1/4 : $1/2 = a_1$
Valor de derivada en x = 1/4 : $1 = a_2$
Valor funcional en x = 1 : $1 = a_1 + (3/4)a_2 + (9/16)a_3$, entonces $a_3 = -4/9$
Valor de derivada en x = 1 : $1/2 = a_2 + (3/2)a_3 + (9/16)a_4$, entonces $a_4 = 8/27$
Valor funcional en x = 9/4 : $3/2 = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 5a_4 + (25/4)a_5 = 3/2$, entonces $a_5 = -76/675$
$P_4(x) = 1/2 + (x-14) -4/9(x-1/4)^2 + 8/27(x-1/4)^2(x-1) -76/675(x-1/4)^2(x-1)^2$

b) $P_4(1/2) = 1/2 + 1/4 -4/9*1/16 + 8/27*1/16*(-1/2) -76/675*1/16*1/4 = 0.711204\ldots$

$f(1/2) = \sqrt{1/2} = 0.7071068\ldots$ Error $= f(1/2) - P_4(1/2) = -4.097*10^{-3}$

$f(x) = x^{1/2}$, $f'(x) = (1/2)x^{-1/2}$, $f''(x) = (-1/2)(1/2)x^{-3/2}$, $f'''(x) = (-3/2)(-1/2)(1/2)x^{-5/2}$,
$f^{(4)}(x) =(-5/2)(-3/2)(-1/2)(1/2)x^{-7/2}$, $f^{(5)}(x) =(-7/2)(-5/2)(-3/2)(-1/2)(1/2)x^{-9/2} = (105/32)x^{-9/2}$

$$\frac{f^{(5)}(c)}{5!}(1/2-1/4)^2(1/2-1)^2(1/2-9/4)=\frac{105c^{-9/2}}{32*120}\frac{(-7)}{4^2*2^2*4}$$

Si c = 1/4 entonces $c^{-9/2} = 2^9$; si c = 9/4 entonces $c^{-9/2} = (2/3)^9$ y por lo tanto:
$-7*105*2^9 / 32*120*2^8 < \text{Error} < -7*105*2^9 / 32*120*2^8*3^9$, o sea :
$-0.3828 < \text{Error} < -1.94*10^{-5}$ lo que es coherente con el error real obtenido de $-4.097*10^{-3}$

c) Si descartamos el dato de valor funcional en x = 9/4 vamos a hallar un polinomio interpolador de 3^er^ grado. Si tomamos ahora como base de los polinomios de grado menor o igual que 3 al conjunto : $\{ 1 , x-1/4 , (x-1/4)^2 , (x-1/4)^2(x-1) \}$ resulta para el polinomio interpolador de 3^er^ grado:
$P_3(x) = 1/2 + (x-14) -4/9(x-1/4)^2 + 8/27(x-1/4)^2(x-1)$
$P_3(1/2) = 1/2 + 1/4 -4/9*1/16 + 8/27*1/16*(-1/2) = 77/27*4 = 0.71296\ldots.$
Error $= f(1/2) - P_3(1/2) = -5.856*10^{-3}$

$$\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(1/2-1/4)^2(1/2-1)^2 = \frac{-15c^{-7/2}}{16*24}\frac{1}{4^2*2^2}$$

Si c = 1/4 entonces $c^{-7/2} = 2^7$; si c = 1 entonces $c^{-7/2} = 1$ y por lo tanto:
$-15*2^7 / 16*24*2^6 < \text{Error} < -15 / 16*24*2^6$, o sea :
$-0.0781 < \text{Error} < -6.10*10^{-4}$ lo que es coherente con el error real obtenido de $-5.856*10^{-3}$
Resulta mejor el método de la parte a) al comparar los errores ($-4.097*10^{-3}$ contra $-5.856*10^{-3}$)

2)a) $z_x = -3(x-1)^2 -12(y^2-1) = 0$
$z_y = 24yLy +12y - 24xy = 0$. Dividiendo esta última por 12y > 0 y la primera por -3:
$(x-1)^2 +4(y^2-1) = 0$
$2Ly +1 - 2x = 0$

b) Si J_f es la matriz jacobiana de la función $f = ((x-1)^2 +4(y^2-1) ,\ 2Ly +1 - 2x)^t$, el Método de Newton-Raphson itera, partiendo de un valor inicial $x^{(0)}$, mediante:
$J_f(x^{(k)})p^{(k)} = -f(x^{(k)})$; $x^{(k+1)} = x^{(k)} + p^{(k)}$

En este caso la matriz jacobiana vale : $J_f = \begin{bmatrix} 2(x-1) & 8y \\ -2 & 2/y \end{bmatrix}$

c) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/4 \end{pmatrix}$, $f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.2274 \end{pmatrix}$, $J_f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.9448 \\ 0.2354 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.0039 \\ -0.0036 \end{pmatrix}, \quad J_f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3.8896 & 1.883 \\ -2 & 8.4973 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.9435 \\ 0.2361 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(2)}) = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.4043 \\ -0.9861 \end{pmatrix}, \quad J_f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -3.8896 & 1.8889 \\ -2 & 8.4706 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.9435 \\ 0.2361 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(3)}) = 10^{-10} \begin{pmatrix} 0.1343 \\ -0.4548 \end{pmatrix}, \quad \| f(x^{(3)}) \|_2 = 4.74 * 10^{-11}$$

d) $$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.4643 \\ 0.9643 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.0064 \\ -0.0013 \end{pmatrix}, \quad J_f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -1.0714 & 7.7143 \\ -2 & 2.0741 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.4625 \\ 0.9632 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(2)}) = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.771 \\ -0.1236 \end{pmatrix}, \quad J_f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -1.075 & 7.7057 \\ -2 & 2.0764 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.4625 \\ 0.9632 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(3)}) = 10^{-10} \begin{pmatrix} 0.1022 \\ -0.0174 \end{pmatrix}, \quad \| f(x^{(3)}) \|_2 = 1.036 * 10^{-11}$$

3) a) $y'' = x' + wy' = w^2y - wx + wy' = w^2y - w(y' - wy) + wy' = 2w^2y$

Resulta : $y'' = 2w^2y$, $y(0) = 1$, $y(\pi / 2w) = 0$

b) Considero $(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)) / h^2$:

$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)h^2/2 - f'''(x)h^3/6 + f^{(4)}(x)h^4/24 + \ldots\ldots$

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2 + f'''(x)h^3/6 + f^{(4)}(x)h^4/24 + \ldots\ldots$

$(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)) / h^2 = f''(x) + f^{(4)}(x)h^2/12 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Entonces:

$(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)) / h^2 = f''(x) + f^{(4)}(c)h^2/12$ con c en $[x-h , x+h]$

Por tanto la fórmula anterior tiene un error de truncamiento de orden 2

c) Dividimos el intervalo $[0 , \pi / 2w]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \pi / 2wn$

Tendremos n + 1 variables : $y_0 , y_1 , \ldots.., y_k , \ldots., y_{n-1} , y_n$ de las cuales $y_0 = 1$, $y_n = 0$

Queda el sistema en las variables $y_1, \ldots.., y_k , \ldots., y_{n-1}$:

$-2(1+h^2w^2)y_1 + y_2 = -1$,

$y_{k-1} -2(1+h^2w^2)y_k + y_{k+1} = 0$, $k = 2, 3, \ldots\ldots, n-2$

$y_{n-2} - 2(1+h^2w^2)y_{n-1} = 0$

Sistema tridiagonal (n-1)x(n-1), líneas sub y supra diagonal de 1, diagonal = $-2(1+h^2w^2)$, término independiente vale 0 excepto la primer posición que vale -1

d) La matriz es simétrica y diagonal dominante. Se puede escalerizar sin intercambiar filas. La matriz final escalerizada tiene dos líneas no nulas: la diagonal que es la que hay que ir calculando y la supradiagonal que no cambia en los pasos de escalerización y por tanto se mantiene siempre como una línea de 1 (que no calculamos). Lo otro que hay que hacer es calcular el término independiente que va cambiando en la escalerización.

Llamemos M a la matriz y b al término indep. (vale 0 excepto b(1) = -1)

(Recordar que la subdiagonal original de M vale 1)

```
For k = 1:(n-2)
  M(k+1,k) = 0;
  M(k+1,k+1) = M(k+1,k+1) – 1/ M(k,k);
  b(k+1) = -b(k) / M(k,k);
end
```

Para el ciclo necesitamos 3 flops. Para la escalerización completa serían 3(n-2) flops. Mucho más eficiente que la escalerización de una matriz (n-1)x(n-1) completa que consume $O(n^3)$ flops.